Université de Strasbourg

Faculté des sciences économiques et de gestion

mercredi 3 mai 2017

Licence première année. Analyse S2

Les documents, les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.
Durée : 2h. Responsable : A. Saïdi

Exercice 1 (4 points) :

Soient les ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{3n + (-1)^n}{n + 2}, \quad n \in \mathbb{N}^\star \right\}, \qquad \text{et} \qquad B = \left\{ \frac{m - n}{m + 2n}, \quad m, n \in \mathbb{N}^\star \right\}.$$

1. Calculer un majorant et un minorant (s'ils existent) de A et B.
2. Calculer (si elles existent) les bornes sup et inf des ensembles A et B.
3. A et B admettent ils des min, des max ?

Exercice 2 (4 points) :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - 1)(E(x) - 2)$$

où $E : x \mapsto E(x)$ désigne la fonction partie entière.

1. Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Représenter f sur l'intervalle $[-1\,,\,4[$.
3. Sur cet intervalle, f admet-elle un maximum ? un minimum ? les préciser si c'est le cas.

Exercice 3 (4 points) :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}((u_n)^2 - 1)(u_n - 2) + u_n$.

1. On suppose que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ. Calculer, en justifiant, cette limite.
2. On suppose $u_0 = 0$, étudier la convergence de (u_n).
3. Même question pour $u_0 = 3$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P

Exercice 4 (4 points) :

Soit $f : \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \exp(\frac{1}{x})$.

Où l'application $x \mapsto \exp(x)$ désigne la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$.

1. Donner l'énoncé des théorèmes de Rolle et des accroissements finis.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x\,,\, x+1[$ tel que :

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2}\exp\left(\frac{1}{c}\right)$$

3. Déterminer la limite :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$$

Exercice 5 (5 points) :

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et f_n une fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = 1 - \frac{x}{2} - x^n\,.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in [0,1]$ telle que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad f_{n+1}(u_n) > 0$,
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est monotone et qu'elle converge vers une limite ℓ.
4. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a $0 \leq u_n \leq M < 1$:
   a) Calculer la limite de u_n^n lorsque n tend vers l'infini.
   b) En déduire la limite de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.