

Licence première année. Analyse S2

Les documents, les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.  
Durée : 2h. Responsable : A. Saïdi

Exercice 1 ( 4 points ) :

Soient les ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}; \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad \text{et} \quad B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m}; \quad m, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Calculer un majorant et un minorant (s'ils existent) de  $A$  et  $B$ .
2. Calculer (si elles existent) les bornes sup et inf des ensembles  $A$  et  $B$ .
3.  $A$  et  $B$  admettent ils des min, des max ?

Exercice 2 ( 4 points ) :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{1 - \cos(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{3x})}{2x}$$

Exercice 3 ( 4 points ) :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto \frac{1}{5}(x^2 + x + 3)$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $f$  et tracer son graphe.
2. On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par le terme initial  $u_0 \in \mathbb{R}$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . On suppose que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $\ell$ . Calculer  $\ell$ .
3. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans chacun des cas suivants :  
 $u_0 = -\frac{9}{2}$ ,  $u_0 = -3$ ,  $u_0 = -2$  et  $u_0 = -1$ .