FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES & DE GESTION

Université de Strasbourg

Année Universitaire 2017/2018
Licence Economie et Gestion, L2-S3

UE Techniques quantitatives

Examen : Probabilités et statistique III – Session 1 – Décembre 2017

Durée de l'épreuve : **2h00.** Enseignant : M. EL OUARDIGHI
Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques.
Les calculatrices sont autorisées.
Barème indicatif : **I.** 2+2=4 points. **II.** 2+2+2+2+2=10 points. **III.** 2+2+2=6 points.
Temps moyen indicatif : **I.** 15mn. **II.** 55mn. **III.** 30mn.

Sujet

I. On suppose que le rendement d'un placement financier peut être modélisé par une variable aléatoire normale de moyenne μ et d'écart-type σ, i.e., $N(\mu;\sigma)$. Considérons les deux placements suivants : $X \to N(1.25;0.05)$ et $Y \to N(3.25;0.95)$. Nous supposons que les deux placements ne sont pas indépendants.

I.1. Calculer $E(X+Y)$ et $V(X+Y)$.

I.2. Le coefficient de corrélation entre les deux rendements est $\rho(X,Y) = -0.79$, quelle est la valeur de $V(X+Y)$ dans ce cas ?

II. Un organisme public souhaite étudier les dépenses mensuelles des ménages en produits d'entretien. Il prélève ainsi un EAS (échantillon aléatoire simple) d'effectif $n = 100$ ménages. Les dépenses mensuelles observées sont de l'ordre de 26.25 euros. Nous supposons que la dépense mensuelle en produits d'entretien, notée X, de la population est distribuée selon une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 5$.

II.1. Quel est l'estimateur par la méthode des moments de μ, noté $\breve{\mu}_{MM}$? Montrer que $\breve{\mu}_{MM}$ est sans biais et convergent.

II.2. Donner les expressions des fonctions vraisemblance, i.e., $L(x_1,\ldots,x_n;\mu)$, et log-vraisemblance, i.e., $\ln L(x_1,\ldots,x_n;\mu)$, de l'échantillon. Calculer ensuite l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ, noté $\breve{\mu}_{MV}$.

II.3. Peut-on conclure que $\breve{\mu}_{MV}$ est efficace ? Justifier votre réponse.

II.4. Pour un niveau de confiance de 95%, déterminer un intervalle de confiance pour μ.

II.5. Déterminer la taille de l'échantillon pour que l'erreur maximale, au niveau de confiance de 95%, soit inférieure ou égale à 0.5.

III. Une entreprise est spécialisée dans la production en grande série des pièces métalliques susceptibles de présenter au moins un défaut. Les inspections antérieures de la production ont estimé à 7% la probabilité qu'une pièce soit défectueuse. On prélève au hasard (sans remise) un échantillon de 100 pièces dans la production. Soit la variable aléatoire X 'le nombre de pièces de l'échantillon présentant des défauts'.

III.1. (***i***) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Quels sont ses paramètres ? (***ii***) Calculer la probabilité d'avoir exactement une pièce défectueuse dans l'échantillon.

III.2. (***i***) Par quelle loi *discrète* appropriée peut-on approximer la loi de X ? (***ii***) Justifier l'approximation et calculer le ou (les) paramètre(s) de la nouvelle loi. (***iii***) Utiliser cette approximation pour calculer la probabilité d'avoir exactement une pièce défectueuse dans l'échantillon.

III.3. On décide d'approcher la variable aléatoire X par une loi Normale. (***i***) Calculer les paramètres de la nouvelle loi. (***ii***) Utiliser cette approximation pour calculer la probabilité d'avoir exactement une pièce défectueuse dans l'échantillon. (***iii***) L'approximation par une loi continue est-elle justifiée ?