

Année Universitaire 2017/2018  
Licence Economie et Gestion, L2-S3**UE Techniques quantitatives****Examen : Probabilités et statistique III – Session 2 – Juin 2018**Durée de l'épreuve : **1h30**.

Enseignant : M. EL OUARDIGHI

Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques.

Les calculatrices sont autorisées.

Barème indicatif : I. 2+2=4 points. II. 2+2+2=6 points. III. 2+2+2+2+2=10 points.

Temps moyen indicatif : I. 15mn. II. 25mn. III. 45mn.

---

**Sujet**

I. Le nombre de clients utilisant dans un espace d'une heure un guichet automatique d'une banque peut être modélisé par une loi de Poisson de paramètre 35.

II.1. Quelle est la probabilité qu'il ait 22 utilisateurs maximum en une heure ?  
(*procédure/indication*: utiliser certains résultats généraux pour donner une approximation à cette probabilité. Un calcul utilisant la loi exact est considéré comme une réponse fausse !).

II.2. Quelle est la probabilité que le nombre d'utilisateur est compris entre 29 et 31 en une heure ?  
(*note* : même procédure/indication que précédemment).

II. Soit  $X$  une variable aléatoire continue définie dans l'intervalle  $[0,2]$  et  $f(x) = kx$  sa densité de probabilité.

II.1. Pour quelle valeur de la constante  $k$  a-t-on bien défini une loi de probabilité ?

II.2. Déterminer la fonction de répartition de la variable  $X$ .

II.3. Déterminer l'espérance et la variance mathématiques de  $X$ .

III. Pour estimer la proportion  $p$  de ménages équipés d'un bien électroménager, un service d'étude a considéré un échantillon de taille  $n$  dans la population totale dont la taille est supposée infinie). A chaque ménage  $i$ , il est associé la variable aléatoire de Bernoulli  $X_i$  où  $X_i = 1$  si le ménage possède le bien en question et  $X_i = 0$  sinon.

III.1. Quel est l'estimateur naturel de la proportion  $p$  ? *indication/précision* : construire à l'aide de l'échantillon l'estimateur de  $p$  obtenu par la méthode des moments.

III.2. Montrer que l'estimateur obtenu précédemment est sans biais et convergent.

III.3. Écrire la vraisemblance de l'échantillon, notée  $L(x_1, \dots, x_n; p)$  et déduire la fonction log-vraisemblance,  $\ln L(x_1, \dots, x_n; p)$ .

III.4. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de la proportion  $p$ .

III.5. Etudier l'efficacité de l'estimateur du maximum de vraisemblance de la proportion  $p$ .

---