FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES & DE GESTION

Université de Strasbourg

Année universitaire 2017/2018

LICENCE Economie-Gestion
2ème année

Semestre 4 – Session 2 / Contrôle terminal juin 2018

Matière : Mathématiques IV (M. BRECKLE)
Durée : 1h30
Les calculatrices de type scientifique sont autorisées (calculatrices graphiques interdites).
Aucun document n'est autorisé.

PARTIE 1 : Espaces vectoriels (7 points)

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y=0 \text{ et } x+z=0\}$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,2,3,4)$ et $u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille (u_1,u_2,u_3) est-elle libre ?
4. Soit $G = Vect(u_1,u_2,u_3)$. Quelle est la dimension de G ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$. Justifier.
7. Est-ce que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ? Justifier.

PARTIE 2 : Diagonalisation de matrices (8 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
3. La matrice est-elle diagonalisable ? Justifier. Exprimer D , la matrice diagonale associée à A.
4. Déterminer la matrice de passage P et calculer son inverse P^{-1}.
5. Quel est le lien entre les valeurs propres de A et celles de A^n ? Même question pour les vecteurs propres.
6. Exprimer D^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donner une relation entre A^n , D^n, P et P^{-1}.
7. En déduire l'expression détaillée de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE 3: Applications linéaires (5 points)

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application définie pour tout vecteur $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x+y+z, x-2y+z, x+y-2z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $Ker(f)$ et en donner une base. En déduire $\dim(Im(f))$. Justifier.
3. Déterminer $Im(f)$ et en donner une base.
4. A-t-on $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$? Justifier.
5. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.