Faculté

des **sciences économiques** et de **gestion**

Université de Strasbourg

Année Universitaire 2018/2019
Licence Economie et Gestion, L2-S3

UE Techniques quantitatives

Examen : Probabilités et statistique III – Session 1 – Décembre 2018

Durée de l'épreuve : **2h00.** Enseignant : M. EL OUARDIGHI

Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques.
Les calculatrices sont autorisées.
Barème indicatif : **I.** 2+2+2=6 points. **II.** 2+2+2=6 points. **III.** 2+2+2+2=8 points.
Temps moyen indicatif : **I.** 20mn. **II.** 35mn. **III.** 50mn.

Sujet

I. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de même paramètre λ.

I.1. Soit la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ? Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

I.2. Posons $\lambda = 7$. Par quelle loi peut-on approximer la loi de Y ? déterminer les paramètres de cette loi.

I.3. En considérant la loi approximée de Y, calculer la probabilité $P(Y = 14)$.

II. Pour faire face à une demande importante et soudaine lors des fêtes de fin d'année, certains magasins de biens de consommation constituent des stocks de sécurité. La taille du stock peut être considérée comme une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On cherche à estimer ce dernier à partir d'un échantillon ($X_1, \dots, X_n$) de la loi de Poisson.

II.1. Écrire la vraisemblance de l'échantillon, notée $L(x_1, \dots, x_n; \lambda)$ et déduire la fonction log-vraisemblance. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ.

II.2. Montrer que l'estimateur obtenu en **II.1.** est sans biais et convergent.

II.3. Peut-on conclure que l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ est efficace ?

III. Considérons le modèle de régression linéaire simple suivant :

$$\ln salaire_i = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

où $salaire_i$ et $educ_i$ désignent respectivement le taux de salaire horaire (mesuré en euros) et le niveau d'éducation (mesuré en nombre d'années d'études) de l'individu i. Les observations concernant 526 individus indiquent les résultats présentés dans le tableau ci-dessous :

variable	Moyenne	Ecart-type
$\ln salaire$	1.62	0.53
$educ$	12.56	2.77
$\ln salaire \times educ$	21.03	9.87

III.1. Donner les expressions des estimateurs des MCO (Moindres carrés ordinaires) des paramètres β_0 et β_1. Application : avec les indications du tableau ci-dessus, calculer les valeurs estimées $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$.

III.2. A partir de l'équation décrivant l'écart par rapport à la moyenne, i.e. $(\ln salaire_i - \overline{\ln salaire})$, déduire l'équation de l'analyse de la variance où la somme des carrés totale, i.e. SCT$=\sum_{i=1}^{n}(\ln salaire_i - \overline{\ln salaire})^2$, est définie comme la somme des carrés expliquée (SCE) et la somme des carrés résiduelle (SCR).

III.3. Définir et calculer la part de la variabilité expliquée par le modèle. Interpréter votre résultat.

III.4. Calculer l'intervalle de confiance à 95% pour le paramètre β_1 et évaluer ensuite cet intervalle. Interpréter votre résultat et conclure. *Indication* : $\hat{V}(\hat{\beta}_1) = \dfrac{\hat{V}(\hat{\varepsilon})}{n \times V(educ)}$.