

Matière : Mathématiques IV (M. BRECKLE)

Durée : 2h

Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.

PARTIE 1 : Systèmes linéaires (2,5 points)

1. Résoudre le système :
$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ point})$$
2. Résoudre le système :
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases} \quad (1,5 \text{ point})$$

PARTIE 2 : Espaces vectoriels (6 points)

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$ et soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$

Soient $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (0,5 point)
2. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (0,5 point)
3. Déterminer une famille génératrice de E . Justifier que cette famille est une base. (1 point)
4. Montrer que $\{u_2, u_3\}$ est une base de F . (1 point)
5. Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. (1 point)
6. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$? Justifier. (1 point)
7. Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer le vecteur v dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$. (1 point)

PARTIE 3 : Diagonalisation de matrice (6,5 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A . (0,5 point)
2. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres. (2 points)
3. Montrer que A est diagonalisable et donner la matrice D , matrice diagonale associée à A . (0,5 point)
4. Déterminer une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P et calculer son inverse P^{-1} . (1 point)
5. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ? (0,5 point)
6. Exprimer D^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis donner une relation entre A^n, D^n, P et P^{-1} . (0,5 point)
7. Exprimer alors A^n en fonction de D^n et en déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (1,5 point)

PARTIE 4 : Applications linéaires (5 points)

Soit $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ une application définie pour tout vecteur $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :
$$f(u) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire. (0,5 point)
2. Déterminer le noyau de f , noté $\text{Ker}(f)$ et en donner une base. (1 point)
Quelle est la dimension de l'image de f ? Justifier. (0,5 point)
3. Déterminer $\text{Im}(f)$ et en donner une base. (1 point)
4. L'application f est-elle injective? surjective? bijective? Justifier. (1 point)
5. A-t-on $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$? Justifier. (1 point)