Faculté

des **sciences économiques** et de **gestion**

Université de Strasbourg

Année universitaire 2018/2019

LICENCE 2ème année Economie et Gestion
Semestre 4 – Session 1 / Contrôle continu / Mars 2019

Probabilités et statistique IV. Durée : 1h30
COURS : M. J. EL OUARDIGHI ; TD : MM. M. BERTEMES; F. DESTANDAU; H.A. NAFI AMIR ;
Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques. **Calculatrice :** autorisée.
Barème indicatif : 2 points par question.

Sujet

Dans une commune agricole, nous retrouvions en moyenne une concentration de pesticides de $0.5\mu g/l$ dans la rivière à l'aval. Le Conseil Municipal décide alors de mettre des bandes enherbées le long de la rivière pour accroître l'autoépuration des pesticides avant émission dans la rivière. Après cette opération, une campagne de $n=10$ mesures permet de relever une concentration moyenne empirique de $0.43\mu g/l$. En nommant X la variable aléatoire gaussienne qui définit la concentration de pesticide dans la rivière, nous souhaitons savoir si celle-ci a diminué de façon significative grâce à la bande enherbée. L'écart type de X est $\sigma=0.15$.

1. Poser les hypothèses H_0 et H_1 du test.

2. Ecrire la loi de la variable de décision du test si l'hypothèse H_0 est vraie (avec les chiffres).

3. Quelle est la région critique du test au seuil d'erreur de 5%. Conclure.

4. Calculer la Puissance du test si, en H_1, l'espérance de X est $0.4\mu g/l$.

5. On souhaite trancher à partir de l'intervalle de confiance. Pour un niveau de 95%, construire deux intervalles de confiance unilatéral à droite et unilatéral à gauche pour la moyenne observée. Lequel des deux intervalles faut-il privilégier ? Effectuer le test et conclure.

6. Soit le modèle statistique $H_0 : \mu = 0.5$ contre $H_1 : \mu = 0.4$. Considérons les deux décisions : D_0 'ne pas entreprendre un enherbement' et D_1 'entreprendre un enherbement'. Le tableau ci-dessous donne les coûts associés à chaque décision en fonction de l'état de la nature.

Tableau des coûts associés aux décisions

	Hypothèse vraie (Etat de la nature)	
Décision retenue	$H_0 : \mu = 0.5$	$H_1 : \mu = 0.4$
D_0 (ne pas enherber)	1	-1
D_1 (enherber)	2	-2
Probabilité a priori	$p_0 = 0.5$	$p_1 = 0.5$

6.a. Soient $L_0(x_1,\ldots,x_{10};\mu_0)$ et $L_1(x_1,\ldots,x_{10};\mu_1)$ les valeurs des vraisemblances respectivement sous H_0 et H_1. Déterminer les probabilités a postériori, notées π_0 et π_1, des hypothèses H_0 et H_1 à l'aide du théorème de Bayes.

6.b. Déterminer l'espérance du coût de chaque décision.

6.c. Discuter la décision à retenir en comparant les vraisemblances L_0 et L_1.

7. Les valeurs des fonctions de vraisemblance sont de l'ordre de 73.363 et 178.452 respectivement pour $L_0(x_1,\ldots,x_{10};\mu_0)$ et $L_1(x_1,\ldots,x_{10};\mu_1)$. Quelle est la décision du Conseil Municipal ?

8. Enoncez la règle de Neyman et Pearson, et utilisez-la pour conclure sur le test $H_0 : \mu = 0.5$ contre $H_1 : \mu = 0.4$.
