Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2018 - 2019

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit sur cet espace une mesure μ_1 donnée pour tout $c > 0$ par

$$\mu_1 = c \sum_{i=1}^{3} i\delta_i,$$

où δ_i est la mesure de Dirac en i.

1) Rappeler la définition de la mesure de Dirac.

2) Montrer que μ_1 est une mesure.

3) Donner la valeur de c pour que μ_1 soit une mesure de probabilité.

4) Soit $X_1 : (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi μ_1. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.

On définit à présent sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la mesure μ_2 qui est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $f(x) = \exp(-x)\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$.

5) Soit $X_2 : (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi μ_2. Donner l'expression de la fonction de répartition F_2 de X_2. Calculer $\mathbb{E}(X_2)$.

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mu = \mu_1/4 + 3\mu_2/4$.

6) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

7) Calculer l'espérance de X.

Exercice 2 – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de loi $\mathbb{P}_X$ qui est à densité par rapport à la mesure de comptage

$$\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_i,$$

de densité la fonction positive et mesurable $f : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ définie par $f(x) = 1/2^{x+1}$.

1) On note F la fonction de répartition de X. Montrer que $F(t) = 0$ pour tout $t < 0$ et que, pour $t \in [n-1, n[$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $F(t) = 1 - 2^{-n}$.

2) Calculer l'espérance de X. Vous pourrez utiliser au choix l'une des deux méthodes suivantes :