CC 1

Durée de l'interrogation : 1 heure 30 minutes

Les documents et téléphones portables ne sont pas autorisés. Seules les calculatrices sont autorisées.

Toute réponse doit être expliquée et justifiée.

1.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. La couronne définie dans $\mathbf{R}^2$ par $1 \leq ||X|| \leq 2$ est convexe.
2. Un cube est un polyèdre dans $\mathbf{R}^3$.
3. Une fonction affine admet toujours un maximum sur un ensemble compact de $\mathbf{R}^n$.
4. Il existe des ensembles convexes qui n'ont pas de sommets.

2.

On considère les domaines Γ et Γ' définis par

$$\Gamma : \begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + y \geq 20 \\ 2x + y \geq 30 \\ 3x - y \leq 50 \end{cases} \qquad \Gamma' : \begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ y \leq 10 \\ x + y \geq 20 \\ 2x + y \geq 30 \\ 3x - y \leq 50 \end{cases}$$

et la fonction $\omega : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ par $\omega(x, y) = 3x + 4y$.

1) Représentez le domaine Γ'.
2) Montrer que ω admet un minimum sur Γ'.
3) En utilisant le graphique précédent, déterminer graphiquement le point où ω présente un minimum sur Γ'.
4) Montrer que $\inf_\Gamma \omega(x, y) = \inf_{\Gamma'} \omega(x, y)$. En déduire que ω présente un minimum sur Γ.
5) Montrez que Γ n'est pas borné.
6) Déterminez $\sup_\Gamma \omega(x, y)$.