/

Faculté

des **sciences économiques** et de **gestion**

Université de Strasbourg

Année universitaire 2018/2019

Licence 3ème année Mathématiques-Economie-Gestion

Semestre 6 / Contrôle terminal Mai 2019

Matière: UE Econométrie (Bertrand Koebel)
Durée: 2H00
Documents autorisés: support de cours et notes de cours manuscrites. Les notations utilisées sont celles du cours.
Calculatrice interdite.

Exercice 1 (5 points). Soit $\varepsilon = \mathbf{y} - \mathbf{X}_1\beta_1 - \mathbf{X}_2\beta_2$. On dénote par $\mathbf{P}_{\mathbf{X}_j}$ le projecteur orthogonal sur $\mathrm{col}(\mathbf{X}_j)$, et $\mathbf{M}_{\mathbf{X}_j} = \mathbf{I}_N - \mathbf{P}_{\mathbf{X}_j}$ pour $j = 1, 2$.

1. (1 pt.) Montrer que pour une certaine matrice $\mathbf{R}$ à définir, on peut écrire
$$\varepsilon^\top \varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon^\top \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^\top \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^\top \mathbf{R}\varepsilon.$$
2. (3 pts.) On remarque que les valeurs prises par ε dépendent des paramètres $\beta = \left(\beta_1^\top, \beta_2^\top\right)^\top$ et on note ces valeurs $\varepsilon(\beta)$.
   (a) Minimiser en (β_1, β_2) les deux fonctions $\varepsilon(\beta)^\top \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\varepsilon(\beta)$ et $\varepsilon(\beta)^\top \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2}\varepsilon(\beta)$ et déterminer ainsi $\left(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2\right)$
   (b) Calculer la valeur de $\varepsilon\left(\widehat{\beta}\right)^\top \mathbf{R}\varepsilon\left(\widehat{\beta}\right)$
   (c) Mettre en évidence les liens existants entre les problèmes d'optimisation ci-dessous (utiliser les points 1, 2a et 2b.):
$$\min_{\beta_1,\beta_2} \varepsilon(\beta)^\top \varepsilon(\beta)$$
$$\min_{\beta_2} \frac{1}{2}\varepsilon(\beta)^\top \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\varepsilon(\beta)$$
$$\min_{\beta_1} \frac{1}{2}\varepsilon(\beta)^\top \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2}\varepsilon(\beta)$$
3. (1 point) Illustrer graphiquement la fonction $\varepsilon(\beta)^\top \varepsilon(\beta)$ et son lien avec $\frac{1}{2}\varepsilon(\beta)^\top \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2}\varepsilon(\beta)$.

Exercice 2 (4 points). Deux estimateurs $\widehat{\theta}_A$ et $\widehat{\theta}_B$ sont disponibles, tous deux sont sans biais pour θ_0.

1. (0.5 pt) Quel autre critère considérer pour choisir entre $\widehat{\theta}_A$ et $\widehat{\theta}_B$?
2. (2.5 pts) Les éléments diagonaux de $V\left[\widehat{\theta}_A\right]$ sont tous inférieurs aux éléments correspondants de $V\left[\widehat{\theta}_B\right]$. Cela permet-il de choisir entre $\widehat{\theta}_A$ et $\widehat{\theta}_B$? Argumentez votre réponse.
3. (1 pt.) Considérer le test d'hypothèse (univarié) relative à la valeur du $i^{ème}$ coefficient

de θ formulé ainsi: $H_0 : \theta_i = 0$. Indiquer la statistique de test à utiliser ainsi que sa distribution. Quelle différence entre le test basé sur $\widehat{\theta}_A$ et celui basé sur $\widehat{\theta}_B$?

Exercice 3 (7 points).

Une étudiante considère la base de données mensuelles comprenant les taux de chômages aux Etats-Unis (celle ayant été utilisée en cours) et y rajoute les taux directeurs de la banque centrale américaine (réels) pour étudier l'influence de la politique monétaire sur l'emploi. Elle a à sa disposition un total de $N = 300$ observations, et considère le modèle linéaire caractérisé par:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\beta_1 + \mathbf{X}_2\beta_2 + \varepsilon \tag{1}$$

avec un vecteur ε de termes d'erreurs aléatoires, tel que $\mathrm{E}[\varepsilon|\mathbf{X}] = 0$ et $\mathrm{V}[\varepsilon|\mathbf{X}] = \sigma_0^2\mathbf{I}_N$. Les matrices $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ sont chacune de dimension $N \times 12$ et comprennent respectivement les données relatives aux 12 taux de chômages et aux 12 taux d'intérêt précédents l'observation contemporaine.

1. (1 pt). Avant de réaliser l'étude, l'étudiante a dé-saisonnalisé les données. Présenter pédagogiquement en quoi a consisté cette opération, et justifier sa pertinence.
2. (3 pts.) Les sommes des carrés des résidus (SSR) obtenues pour cinq spécifications différentes du modèle (1) sont résumées dans le tableau ci-dessous. Chacune des spécifications se distingue en fonction de contraintes imposées sur les coefficients β_1 ou β_2 et explicitées dans les lignes 2 et 3 du tableau.

		échantillon total 1970-94			sous-échantillon 1970-1982	sous-échantillon 1983-94
contrainte	$\beta_1 = 0$	non	oui	non	non	non
contrainte	$\beta_2 = 0$	oui	non	non	non	non
	N	300	300	300	156	144
	SSR	14.1	419.4	12.8	6.3	3.0

1.(a) Réaliser les tests d'hypothèse suivants (il ne vous est pas possible de répondre à cette question intégralement, mais on vous demande d'aller aussi loin dans votre réponse que possible, en explicitant chaque étape) :

(b) $H_0 : \beta_1 = 0$

(c) $H_0 : \beta_2 = 0$

(d) La période 1970 à 1994 a été marquée par deux chocs pétroliers et un contre-choc pétrolier. L'étudiante doute de la validité d'un modèle avec des coefficients identiques sur toute la période, et décide de diviser l'échantillon total en deux. Le premier sous-échantillon couvre la période 1970 à 1982, et le second 1983 à 1994. Elle estime le modèle sur chacun des sous-échantillons et obtient les résultats des colonnes 5 et 6. Réaliser le test de l'égalité de tous les coefficients sur chacune des sous-périodes. $H_0 : \beta_A = \beta_B$ avec β_A dénotant les coefficients pour la période 1970 à 1982, et β_B ceux pour 1983 à 1994.

3. (3 pts.) Expliquer en détails comment vous pourriez adapter le modèle pour imposer et tester les restrictions suivantes.
   (a) H_0 : les 12 coefficients β_2 se situent sur une droite
   (b) H_0 : la politique de taux d'intérêts faibles contribue à réduire le chômage

Exercice 4 (5 points, d'après Ruud, exercice 10.8).
Soit $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mu; \Omega)$ avec Ω inversible de dimension $(N \times N)$.

1. (0.5 pt.) Quelle est la loi de $\mathbf{z} \equiv \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ (où la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur $\mathbf{b}$ ont des dimensions appropriées)?

2. (0.5 pt.) Considérer la partition (où $\mathbf{y}_1$ a $N_1 < N$ composantes):
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix}.$$
Donner l'expression de $\mathrm{E}[\mathbf{y}_1|\mathbf{y}_2]$.

3. (3.5 points) Déterminer la distribution jointe de $\mathbf{z}_1 \equiv \mathbf{y}_1 - \mathrm{E}[\mathbf{y}_1|\mathbf{y}_2]$ et de $\mathbf{z}_2 \equiv \mathbf{y}_2 - \mu_2$. Indication: utiliser le fait que $\mathbf{z} \equiv \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$, et expliciter $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$.

4. (0.5 point) Remarquer que les vecteurs aléatoires $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$ sont tous les deux fonction de $\mathbf{y}_2$. Sont-ils pour autant statistiquement dépendants?