Faculté
des **sciences économiques** et de **gestion**
Université de Strasbourg

Année universitaire 2022/2023
Licences 2ème année - Semestre 4 – Session 1

Licence Economie et Gestion
Licence Sciences pour la Santé
Double Licence Langues Etrangères Appliquées & Economie et Gestion

Contrôle continu (CC) - Mars 2023

Matière : Mathématiques IV

Cours : L. BRECKLE

Travaux dirigés :
J.-P. ATZENHOFFER, C. BOILLEY, L. BRECKLE, F. MERCIER, G. TSOCHALIS

Durée : 1h30

Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Les calculatrices type collège (non graphiques, non programmables) sont autorisées.

Tout autre matériel est interdit. L'échange de matériel, quel qu'il soit, n'est pas autorisé.

Le soin, la qualité de la rédaction et la présentation seront pris en compte dans la notation.

REPONDRE EXCLUSIVEMENT SUR LA COPIE NOMINATIVE D'EXAMEN

Partie 1 (11 points)

A – Cas $n = 2$ avec problème (3 points)

Dans cette partie, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Soit E la matrice telle que $E = (A + B)^2$. Sans développer l'expression, calculer E.
2) Soit F la matrice telle que $F = A^2 + 2AB + B^2$. Calculer F.
3) Pourquoi ne peut-on pas toujours écrire l'égalité $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

B – Cas $n = 2$ un problème résolu (3 points)

Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M.

1) Soit G la matrice telle que $G = \left(A + {}^tB\right)^2$. Sans développer l'expression, calculer G.
2) Soit H la matrice telle que $H = A^2 + 2.A.\ {}^tB + \left({}^tB\right)^2$. Calculer H.
3) Pourquoi avons-nous ici l'égalité $\left(A + {}^tB\right)^2 = A^2 + 2.A.\ {}^tB + \left({}^tB\right)^2$? Justifier précisément votre réponse par 2 calculs.

C – Et l'ordre n... (5 points)

Dans cette partie, on pose $N = A + {}^tB$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Donner l'expression de N puis donner l'expression de N^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ en justifiant clairement vos calculs et vos réponses.
2) Quelle condition doit-on avoir pour développer $(N + D)^p$ avec la formule du binôme de Newton ?
3) Montrer, en justifiant clairement, que la condition précédente est vérifiée.
4) Donner l'écriture générale complète de la formule du binôme de Newton appliquée au calcul de $(N + D)^p$ (on ne demande pas encore de développer).
5) Développer l'expression $(N + D)^p$.
6) Écrire l'expression précédente en factorisant par le terme 2^{p-1}.

<u>Partie 2 (5 points)</u>

A – Menuiserie (2 points)

Une entreprise de menuiserie fabrique 200 chaises par jour. Elle produit deux sortes de chaises, les unes vendues 60 € pièce, les autres 120 € pièce. La production d'une journée a été totalement vendue et le montant des ventes s'élève à 14 520€.

On note x le nombre de chaises à 60 € et y le nombre de chaises à 120 € vendues dans la journée.

1) Montrer que : $AX = B$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 60 & 120 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 14520 \end{pmatrix}$ *(0,5 point)*
2) Déterminer la matrice inverse A^{-1}de la matrice A. *(1 point)*
3) En déduire le nombre x de chaises à 60 € et le nombre y de chaises à 120 € qui ont été vendues. *(0,5 point)*

B – Triathlon (3 points)

Un triathlon comprend un parcours de natation, suivi d'un parcours à bicyclette, puis d'un parcours de course à pied. La distance totale est de 32 km. Le parcours de course à pied dépasse celui de natation de 8 km et le parcours à bicyclette est deux fois plus long que celui de course à pied.

On se propose de calculer la longueur de chacun des parcours.

On note n la longueur du parcours de natation, p celle du parcours de course à pied et b celle du parcours à bicyclette.

1) Montrer que : $AX = B$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} n \\ p \\ b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 32 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(0,5 point)*
2) Déterminer la matrice inverse A^{-1} de la matrice A. *(1,5 points)*
3) En déduire la longueur n du parcours de natation, la longueur p du parcours de course à pied et la longueur b du parcours à bicyclette. *(1 point)*

<u>Partie 3 (4 points)</u>

On considère deux biens, le bien 1 et le bien 2, dont les prix sont respectivement notés P_1 et P_2, les offres O_1 et O_2 et les demandes D_1 et D_2.
On donne les relations suivantes :

$$O_1(P_1) = -200 + 4P_1$$
$$O_2(P_2) = -80 + 2P_2$$
$$D_1(P_1;P_2) = 300 - 4P_1 + 2P_2$$
$$D_2(P_1;P_2) = 400 + 2P_1 - 4P_2$$

1) Établir le système d'équations donnant l'équilibre général, c'est-à-dire lorsque $O_1 = D_1$ et $O_2 = D_2$.

2) Résoudre ce système d'inconnues $(P_1; P_2)$ en utilisant la méthode de Cramer (justifier précisément vos calculs) afin de déterminer les prix à l'équilibre.