

Année universitaire 2022/2023

Licence 2 - Semestre 3 – Session 1

Licence Économie et Gestion

Licence Sciences pour la Santé

Double Licence Langues Étrangères Appliquées & Économie et Gestion



Contrôle continu (CC) - Octobre 2022

Mathématiques III (Mme BOLTZ)

Durée : 1h30

Aucun document autorisé

Calculatrice non autorisée

Répondre exclusivement sur la copie nominative d'examen et non sur ce sujet.

Barème donné à titre indicatif et sujet à changements.

Soignez la rédaction de vos réponses : des points seront alloués à la rédaction et à la clarté de vos réponses.

Exercice 1 : D'oh!

(6 points)

Homer Simpson est un consommateur particulièrement friand de deux produits : la bière Duff (x_1) et les donuts (x_2). Le prix d'une bière Duff est $p_1 = \$3$ et le prix d'un donut est $p_2 = \$2$. Le budget total qu'il va consacrer à la consommation des deux biens est de $\$30$.

Sa fille Lisa, brillante en mathématiques, est parvenue à modéliser la fonction d'utilité de son père à partir de son comportement de consommation passé. Il en ressort que son utilité suit la fonction Cobb-Douglas suivante : $U(x_1, x_2) = 4x_1^{1/3} x_2^{2/3}$

1. Montrer que l'utilité marginale est décroissante pour chacun des deux biens. (1 point)
2. Montrer que la fonction d'utilité est homogène, et déterminer son degré. (1 point)
3. Trouver les quantités optimales de bières et de donuts qui maximisent l'utilité d'Homer avec la méthode du Lagrangien. (3 points)
4. Interpréter le multiplicateur du Lagrangien. (1 point)

Exercice 2 : optimisation sous contrainte d'égalité

(4 points)

On considère la fonction $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$, soumise à la contrainte $x^2 + y^2 = 8$.

1. Déterminer les points stationnaires de cette fonction et sa valeur en chacun de ces points. Il n'est pas demandé de déterminer si ce sont des minima ou des maxima. (3 points)
2. Donner la valeur de multiplicateur de Lagrange en ces points et en donner une interprétation. (1 point)

Exercice 3 : calcul d'intégrales

(4 points)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_1^2 \frac{x^2 - 5x + 2}{x^3} dx$

2. $I_2 = \int_0^3 (2x + 1)e^{-x} dx$

3. $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$

4. $I_4 = \int_1^2 \frac{3 - 3\ln(x)}{5x^2} dx$

Exercice 4 : intégrale d'une fraction rationnelle

(3 points)

1. Montrer que deux réels a et b satisfont $\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} = \frac{2x+3}{x^2-x-6}$ pour tout réel x entre 1 et 2 si le système suivant est satisfait :

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2b-3a=3 \end{cases}$$

2. Déterminer les solutions du système.
3. En déduire le calcul de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2-x-6} dx$$

Exercice 5 : propre et net

(3 points)

Une entreprise fabrique des produits de nettoyage et son coût marginal en euros pour la production de x articles est :

$$C_m(x) = 21x^2 - 42x + 700$$

où $x \geq 0$ et $x \leq 100$. Si le coût fixe est de 3690 euros :

1. Donner la signification de l'expression $\int C_m(x) dx$. (0,5 point).
2. Calculer $\int C_m(x) dx$. (1,5 points)
3. Calculer le coût moyen de l'entreprise. (1 point)