b) Montrez notamment que le jeu admet l'EN dans lequel le joueur 1 joue B_1 et le joueur 2 joue B_2 et D_2 avec les probabilités 1/2 et 1/2. Précisez le gain espéré des deux joueurs à cet équilibre.

5) Reprenez la question 3). Montrez qu'il est maintenant possible, en utilisant les EN en stratégies mixtes, de construire un ENPSJ dans lequel les joueurs jouent (A_1, A_2) au 1^er^ tour de jeu. Précisez et justifiez cet équilibre.

Exercice 2 (5 points)

On vous propose dans cet exercice une nouvelle version du dilemme du voyageur. Rappelez-vous le contexte : une compagnie aérienne a égaré les bagages (identiques) de 2 voyageurs. Elle leur propose, afin de les rembourser, le jeu suivant :

Chaque voyageur doit proposer un montant, entier naturel, allant de 1 à 100 (les deux voyageurs ne peuvent pas communiquer entre eux et ne voient pas le montant proposé par l'autre voyageur). Le voyageur 1 demande x_1, le voyageur 2 demande x_2.

La règle de remboursement est la suivante :

- Si les deux acteurs demandent le même montant, donc si $x_1 = x_2$, chaque voyageur reçoit le montant demandé (le voyageur 1 reçoit x_1 et le voyageur 2 reçoit x_2).
- Si les deux montants sont différents, celui qui a demandé le montant le plus élevé reçoit le montant le plus faible, et celui qui a demandé le montant le plus faible reçoit le montant le plus élevé. Ainsi :
  si $x_1 < x_2$, le joueur 1 reçoit x_2 et le joueur 2 reçoit x_1 ;
  si $x_1 > x_2$, le joueur 1 reçoit x_2 et le joueur 2 reçoit x_1.

Exemples :

Si le joueur 1 demande 87 et le joueur 2 demande 24, le joueur 1 n'obtient que 24 alors que le joueur 2 obtient 87.
Si les joueurs 1 et 2 demandent tous deux 64, ils obtiennent chacun 64.
Si le joueur 1 demande 39 alors que le joueur 2 demande 77, le joueur 1 obtient 77 alors que le joueur 2 n'obtient que 39.

Au vu des exemples donnés, vous observerez que la règle de remboursement revient à toujours donner au joueur 2 le montant demandé par le joueur 1 et à toujours donner au joueur 2 le montant demandé par le joueur 1.

Partie I

Dans cette partie, on ne connaît pas la valeur des bagages égarés.

1) Trouvez les équilibres de Nash (EN) en stratégies pures de ce jeu. Pour ce faire, commencez par donner la forme normale du jeu lorsque les 2 acteurs ne peuvent proposer qu'un entier naturel allant de 1 à 3. Trouvez, sans les justifier, les EN en stratégies pures de ce petit jeu. Puis trouvez les EN en stratégies pures du jeu étudié (c'est-à-dire du jeu où chaque acteur peut proposer un montant de 1 à 100). Justifiez ces équilibres. Quelle est l'originalité du jeu ?
2) Si vous étiez l'un des joueurs, quel montant proposeriez-vous ? Pourquoi ?

Partie II

Il est maintenant connaissance commune que la valeur de chaque bagage est 85. Si vous étiez l'un des joueurs, quel montant demanderiez-vous ? Pourquoi ? Quel montant demanderiez-vous si la valeur de chaque bagage n'était que 55 ? Pourquoi ?

<u>Exercice 3</u> (5.5 points)

Considérez le contexte du plaider coupable illustré par la figure 1 ci-dessous. Un individu, coupable ou non d'un délit, peut choisir de plaider coupable (Pl) ou d'aller au procès (Pr). S'il va au procès, la justice l'innocentera (I) ou le condamnera (C). S'il plaide coupable, il aura une peine qui sera moins lourde que celle obtenue au procès s'il est condamné.

On suppose que l'acteur représentant la justice (on le nommera Justice) est content de condamner un coupable et d'innocenter un innocent (gain de 4 dans les deux cas), et qu'il regrette d'innocenter un coupable ou de condamner un innocent (gain de 0 dans les deux cas). Si l'individu plaide coupable (Pl), la justice a un gain de 3 si l'individu est coupable et un gain de 0 s'il est innocent. L'individu est content d'être innocenté au procès, qu'il soit coupable ou innocent (gain de 4 dans les deux cas), et malheureux d'y être condamné, qu'il soit coupable ou innocent (gain de 0 dans les deux cas). On suppose qu'il est plus facile de plaider coupable pour un individu coupable que pour un individu innocent (gain de 2 pour un individu coupable, gain de 1 pour un individu innocent).

La justice ne dispose que d'une information a priori sur la nature de l'individu, sous la forme d'une distribution de probabilités a priori qui accorde la probabilité 0.6 au fait que l'individu soit coupable (*Cp*), 0.4 au fait qu'il soit innocent (*In*).

La Nature joue en premier, en sélectionnant le type de l'individu selon la distribution a priori. Puis l'individu, qui sait s'il est coupable ou innocent, choisit de plaider coupable ou d'aller au procès. S'il va au procès la justice décide de l'innocenter ou de le condamner.

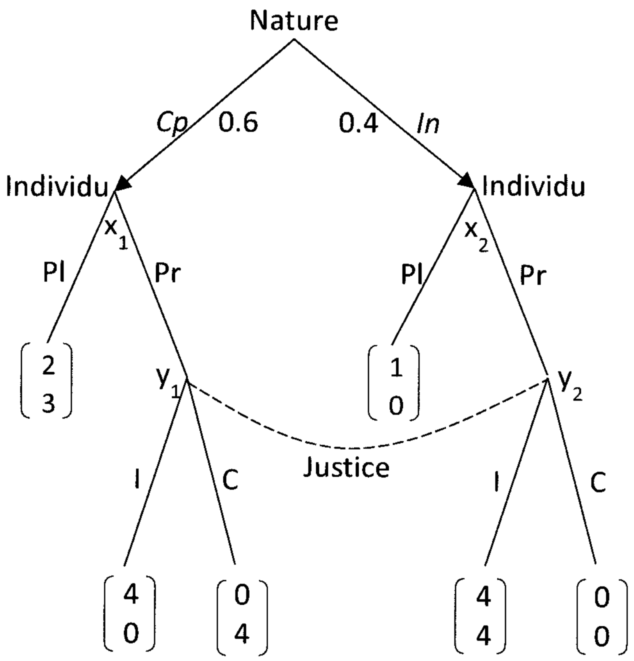


Figure 1

Légende de la figure 1 : la courbe en traits tirets représente un ensemble d'information. Les 1ères et 2èmes coordonnées de chaque vecteur gains sont respectivement les gains de l'Individu et de la Justice.

1) Montrez, en vous servant uniquement de la forme extensive, qu'il n'est pas possible de construire un équilibre de Nash dans lequel l'individu va au procès s'il est innocent et plaide coupable s'il est coupable. Si tel était le cas, comment réagirait la justice au procès et quel comportement cela impliquerait-il de la part de l'individu ?

2) La forme normale associée à ce jeu est donnée dans la matrice 2 ci-dessous :

Matrice 2

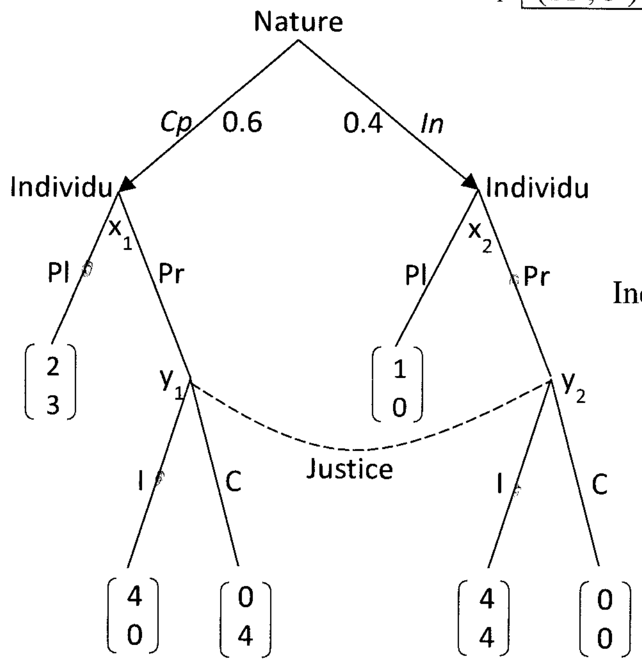
		Justice I	Justice C
Individu	(Pl/*Cp*, Pl/*In*)	(1.6 , 1.8)	(1.6 , 1.8)
	(Pl/*Cp*, Pr/*In*)	(2.8 , 3.4)	(1.2 , 1.8)
	(Pr/*Cp*, Pl/*In*)	(2.8 , 0)	(0.4 , 2.4)
	(Pr/*Cp*, Pr/*In*)	(4 , 1.6)	(0 , 2.4)

a) Trouvez et commentez le seul équilibre de Nash en stratégies pures. Pourquoi cet équilibre n'est pas éthique ?

b) Montrez qu'il est possible de construire un équilibre de Nash en stratégies mixtes, où la justice condamne et innocente avec des probabilités strictement positives et où l'individu va au procès s'il est innocent, mais plaide coupable et va au procès avec des probabilités strictement positives s'il est coupable (ce qui revient à mettre des probabilités strictement positives sur les stratégies (Pl/*Cp*, Pr/*In*) et (Pr/*Cp*, Pr/*In*)). Trouvez cet équilibre. Commentez cet équilibre d'un point de vue éthique.

Figures et matrices supplémentaires que vous pouvez utiliser au besoin.

		Joueur 2 A_2	B_2	C_2	D_2	E_2
Joueur 1	A_1	(8 , 8)	(8 , 2)	(1 , 7)	(0 , 3)	(5 , 9)
	B_1	(0 , 1)	(6 , 6)	(1 , 3)	(7 , 6)	(4 , 3)
	C_1	(11 , 3)	(2 , 4)	(3 , 4)	(8 , 3)	(0 , 4)



		Justice I	Justice C
Individu	(Pl/*Cp*, Pl/*In*)	(1.6 , 1.8)	(1.6 , 1.8)
	(Pl/*Cp*, Pr/*In*)	(2.8 , 3.4)	(1.2 , 1.8)
	(Pr/*Cp*, Pl/*In*)	(2.8 , 0)	(0.4 , 2.4)
	(Pr/*Cp*, Pr/*In*)	(4 , 1.6)	(0 , 2.4)