Faculté
des **sciences économiques** et de **gestior**
Université de Strasbourg

Année universitaire 2022/2023
Licences 1ère année - Semestre 2 – Session 1

Licence Economie et Gestion
Double Licence Mathématiques & Economie et Gestion
Double Licence Langues Etrangères Appliquées & Economie et Gestion

Contrôle continu (CC) - Mars 2023
SUJET C

Matière : Mathématiques II

Enseignant(e) : Stefano Bianchini

Durée : 1h30

Aucun document autorisé

Calculatrice de type collège (non graphiques, non programmables) autorisée

REPONDRE EXCLUSIVEMENT SUR LA COPIE NOMINATIVE D'EXAMEN – QCM /ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1 (5,5 points)

On considère la fonction réelle de deux variables f définie par :

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{4 - (x_1 - 1)^2 - x_2^2}$$

1. Déterminer et représenter graphiquement son ensemble de définition D_f sur la feuille annexe (figure 1-a).
2. Donner l'expression général de ses courbes de niveaux
3. Représenter C_0, $C_{\sqrt{3}}$, C_2 et C_3 les courbes de niveau $0, \sqrt{3}, 2$ et 3 sur la feuille annexe (figure 1-b).

Exercice 2 (4,5 points)

Soient trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Représenter, sur la feuille annexe (figure 2),

   le vecteur A en partant du point $D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   le vecteur B en partant du point $E\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

   le vecteur C en partant du point $F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Quelle est la nature de l'angle formé par
   a) les vecteurs A et B ?
   b) les vecteurs A et C ?

3. Soit $I(x_1, -1, x_3)$. Déterminer x_1 et x_3 de sorte que I appartienne à la droite (BC).

   Indication : Vous utiliserez la méthode vue en TD c'est-à-dire à l'aide de vecteurs.

Nom, Prénom (en MAJUSCULE): ....**N° étudiant :**.....................

QCM A (A rendre avec votre copie d'examen)
Choisir une seule réponse pour chaque question.
(1 point par bonne réponse, $-0,25$ point par erreur, 0 point si aucune réponse)

Q1 : Soit deux éléments de $\mathbb{R}^3$: $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$. Quel est l'expression générale de tous les vecteurs K orthogonaux à A ?

- ☐ $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ 2\,k_1 - k_3 \\ k_3 \end{pmatrix}$
- ☐ $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ -2\,k_1 - 4k_3 \\ k_3 \end{pmatrix}$
- ☐ $K = \begin{pmatrix} k_2 + 4k_3 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$
- ☐ $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 2k_1 - 4k_2 \end{pmatrix}$

Q2 : Quel est l'équation du plan P passant par le point $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

- ☐ $6x_1 - 2x_2 + x_3 - 11 = 0$
- ☐ $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 11 = 0$
- ☐ $6x_1 - 2x_2 + 1 = 0$
- ☐ $2x_1 + 3x_2 + 5 = 0$

Q3 : Soient trois éléments de $\mathbb{R}^3$: $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$. Le vecteur F est une combinaison linéaire des vecteurs D et E tel que :

- ☐ $F = 4D - E$
- ☐ $F = 2D + 3E$
- ☐ $F = 3D + 2E$
- ☐ $F = E - D$

Q4 : La condition d'existence de $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_2 - 2{x_1}^2}}$ est :

- ☐ $x_2 > 2{x_1}^2$
- ☐ $x_2 \neq 2{x_1}^2$
- ☐ $x_2 \geq 2{x_1}^2$
- ☐ $\mathbb{R}^2$

Q5 : Soit $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 2x_1x_2$ pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. La courbe de niveau 1 de f passe par le point de coordonnées :

- ☐ $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$
- ☐ $A(1; 1)$
- ☐ $A(1; \sqrt{2})$
- ☐ $A(\sqrt{3}; \sqrt{2})$

Q6 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x_1, x_2) = e^{\ln(x_1^a) + \ln(x_2^b) + \ln(x_1^b x_2^c)}$.
Sous quelles conditions sur les paramètres a, b et c, la fonction f est-elle homogène de degré 1?

- ☐ $a + b^2 + c = 0$
- ☐ $a = 2b$ et $c = a$
- ☐ Sous aucune condition
- ☐ $a + 2b + c = 1$

NOM, PRENOM (en MAJUSCULE): ....**N° étudiant :**......................

Q7 : À quoi correspond la dérivée partielle de $f(x_1, x_2) = \ln\left(\frac{2x_2+e^{3x_1}}{x_1^2+x_2^3}\right)$ par rapport à x_1 ?

☐ $\dfrac{e^{3x_1}(x_1^2+x_2^3) + 2x_1(e^{3x_1} + 2x_2)}{(x_1^2+x_2^3)(e^{3x_1} + 2x_2)}$

☐ $\dfrac{e^{3x_1} - 2x_1}{x_1^2 + x_2^3}$

☐ $\dfrac{3e^{3x_1}(x_1^2+x_2^3) - 2x_1(2x_2 + e^{3x_1})}{(x_1^2+x_2^3)(2x_2 + e^{3x_1})}$

☐ $\dfrac{3(x_1^2+x_2^3) + 2x_1(e^{3x_1} + 2x_2)}{(x_1^2+x_2^3)(e^{3x_1} + 2x_2)}$

Q8 : Soit la fonction $g(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 \ln(x_1^2 + x_2^2)$. Ces dérivées partielles sont-elles continues en tout point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$?

☐ Oui

☐ Non

Q9 : Soit $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 2x_1x_2$ pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. La matrice hessienne de f vaut :

☐ $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 6x_1 & -2 \\ -2 & 6x_2 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 6x_2 & 2 \\ 2 & 6x_1 \end{pmatrix}$

Q10 : Soit la fonction à deux variables : $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^3}{x_1^2+x_2^2}$.

Quelle est l'élasticité de la fonction f en x_1?

☐ $\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$

☐ $\dfrac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$

☐ $\dfrac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$

☐ $\dfrac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$

NOM, PRENOM (en MAJUSCULE): ....N° étudiant :.......................

ANNEXE (A rendre avec votre copie d'examen même vide)

Figure 1-a (Exercice 1 Question 1)

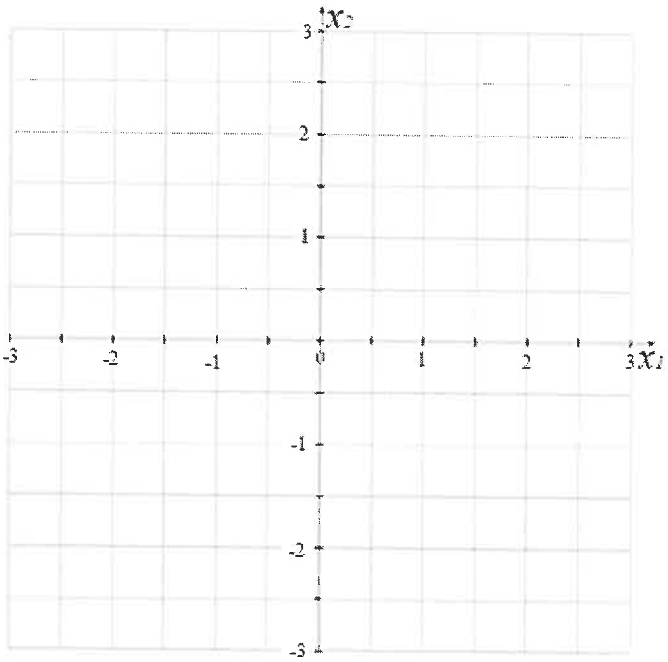

Figure 1-b (Exercice 1 – Question 2)

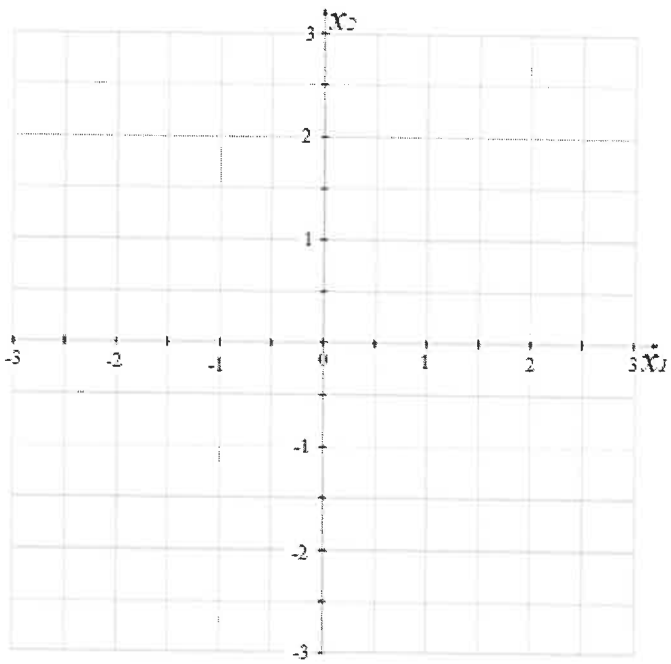

Figure 2 (Exercice 2 – Question 1)