Faculté
des **sciences économiques** et de **gestion**
Université de Strasbourg

Année universitaire 2021/2022

LICENCE Economie et Gestion
2e année
Semestre 3 – Session 1 / Contrôle terminal Janvier 2022

Matière : Mathématiques III
Chargé de Cours : Lionel BRECKLE
Durée : 2h00
Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.
Les calculatrices scientifiques non graphiques et non programmables de type collège sont autorisées.
Tout autre matériel est interdit.
Le soin, la qualité de la rédaction et la présentation sont pris en compte dans la notation.

Partie 1 (4 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x.e^x}{(x+1)^n}$

1. **Montrer que $\forall n \geq 2$, pour tout nombre réel $x \in [0;1]$, on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{e}{(1+x)^n}$**
2. **En déduire que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{e}{n-1}$**
3. **Déterminer la limite de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ lorsque n tend vers l'infini.**

Partie 2 (4 points)

1. **Soit $I = \int_0^1 x.e^{-x^2}dx$**
   a. **Justifier de l'existence de l'intégrale I.**
   b. **Calculer la valeur de l'intégrale I.**
2. **A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{e^t}{(3t-2)^{-1}}dt$**

Partie 3 (7 points)

Dans cet exercice, pour les calculs de probabilités, on donnera une valeur approchée à une précision adaptée.
On admet que la distribution des revenus mensuels dans un certain pays est telle que pour tout $x \geq 0$, la proportion d'individus gagnant moins que x (exprimée en centaines d'euros) est égale à :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad avec \quad f(t) = \frac{5000}{(t+50)^3} \quad pour\ tout\ t \geq 0$$

1. **Calculer $F(x)$ et montrer qu'il s'agit bien d'une fonction de répartition.**
2. **Calculer la probabilité pour un individu de gagner moins de 3 000 €.**
3. **Calculer la probabilité pour un individu de gagner entre 5 000 € et 8 000 €.**
4. **Calculer la probabilité pour un individu de gagner plus de 20 000 €.**
5. **Calculer le revenu moyen.**
6. **Calculer le revenu médian.**

Partie 4 (5 points)

1. **On considère l'équation différentielle : $(E_1)\ \ y'(x) - 4y(x) = -8x - 2$**
   a. **Résoudre l'équation différentielle homogène $y'(x) - 4y(x) = 0$**
   b. **Déterminer une solution particulière de l'équation (E_1).**
   c. **Déterminer la solution $y(x)$ de l'équation différentielle (E_1) qui vérifier la condition initiale $y(0) = 1$**
2. **On considère l'équation différentielle : $(E_2)\ \ y''(t) - y'(t) - 2y(t) = (-6t-4)e^{-t}$**
   a. **Résoudre l'équation différentielle homogène : $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$**
   b. **Trouver une solution particulière de l'équation différentielle (E_2). On cherchera cette solution sous la forme $y_p(t) = (at^2 + bt)e^{-t}$, où a et b sont des réels.**
   c. **Déterminer la solution $y(x)$ de l'équation différentielle (E_2) qui vérifie les conditions initiales :**

$$y(0) = 1 \qquad et \qquad y'(0) = 1$$