Faculté
des **sciences économiques** et de **gestion**
Université de Strasbourg

Année universitaire 2021/2022

LICENCE 2e année
Licence Économie et Gestion
Licence Économie et Gestion parcours Santé
Double Licence Langues Étrangères Appliquées & Économie et Gestion

Semestre 4 – Session 1 / Contrôle continu Mars 2022

Matière : Mathématiques IV

Cours : L. BRECKLE

Travaux Dirigés : J.-P. ATZENHOFFER, C. BOILLEY, L. BRECKLE, F. MERCIER, G. TSOCHALIS

Durée : 1h30

Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Les calculatrices type collège (non graphiques, non programmables) sont autorisées.

Tout autre matériel est interdit. L'échange de matériel, quel qu'il soit, n'est pas autorisé.

Le soin, la qualité de la rédaction et la présentation seront pris en compte dans la notation.

Partie 1 (5 points)

1) Résoudre le système (S_1) ci-dessous en fonction des valeurs du paramètre t : *(2 points)*

$$\begin{cases} 2x + ty = 1 \\ tx + 2y = -1 \end{cases}$$

2) Résoudre le système (S_2) ci-dessous par la méthode de votre choix : *(3 points)*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -x + y + 4z = -2 \\ 3x + 3y - z = 1 \\ 2x - 2y - 8z = 4 \end{cases}$$

Partie 2 (4 points)

1. Résoudre le système (S) ci-dessous : *(1,5 point)*

$$(S) \quad \begin{cases} 3x - 2y = a \\ 2x - y = b \end{cases}$$

2. On considère les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ ci-dessous : *(2,5 points)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Trouver les matrices X et Y de $M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} 3X - 2Y = A \\ 2X - Y = B \end{cases}$$

Partie 3 (5 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et soit I_3 la matrice identité.

On cherche à calculer A^{2022}

1. Soit $B = A - I_3$. Exprimer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. *(2 points)*
2. En utilisant la formule du binôme (justifier pour quelle raison on peut l'appliquer), en déduire l'expression de A^{2022} (on pourra calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis exprimer A^{2022}) *(3 points)*

Partie 4 (6 points)

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

   a. Calculer A^2. En déduire l'inverse de la matrice A. *(1 point)*
   b. Calculer A^3 et A^4. Quel est l'inverse de la matrice A^2 ? *(1 point)*

2. On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   a. Vérifier que la matrice inverse de la matrice B est : $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ *(1 point)*
   b. Déterminer la matrice D telle que $C = B \times D \times B^{-1}$ *(1 point)*
   c. Montrer que $C^3 = B \times D^3 \times B^{-1}$ et en déduire C^3 *(2 points)*