Faculté
des **sciences économiques** et de **gestion**
Université de Strasbourg

Année universitaire 2021/2022

LICENCE 2e année
Licence Économie et Gestion
Licence Économie et Gestion parcours Santé
Double Licence Langues Étrangères Appliquées & Économie et Gestion
Semestre 4 – Session 1 / Contrôle terminal Mai 2022

Matière : Mathématiques IV
Chargé de Cours : Lionel BRECKLE
Durée : 2h00
Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.
Les calculatrices scientifiques non graphiques et non programmables de type collège sont autorisées.
Tout autre matériel est interdit.
Le soin, la qualité de la rédaction et la présentation sont pris en compte dans la notation.

PARTIE 1 : Systèmes linéaires (4 points)

1. Résoudre, à l'aide de la méthode de Cramer, le système ci-dessous selon les valeurs de a :

$$\begin{cases}(a+1)x+(a-1)y=1\\(a-1)x+(a+1)y=1\end{cases}$$

2. On considère le système ci-dessous :

$$\begin{cases}x+2y-z=3\\-x+y+2z=2\\2x+y-3z=1\end{cases}$$

   a. Donner l'égalité matricielle associée à ce système, mise sous la forme $A.X=B$ et expliciter A, X et B.
   b. Calculer le déterminant de la matrice A.
   c. Résoudre ce système par la méthode de Cramer.

PARTIE 2 : Espaces vectoriels (8 points)

Soit $E=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4, x_1+x_3=0 \text{ et } x_2+x_4=0\}$

Soient $u_1=(1,1,1,1), u_2=(1,-1,1,-1)$ et $u_3=(1,0,1,0)$
Soit $F=Vect(u_1,u_2,u_3)$

1. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de E et en déduire la dimension de E.
3. Déterminer une base de F.
4. Caractériser F au moyen d'une ou plusieurs équation(s).
5. Donner une famille généractrice de $E+F$
6. A-t-on $E\oplus F=\mathbb{R}^4$? Justifier.

PARTIE 3 : Diagonalisation de matrices (8 points)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\0&-2&0\\1&2&1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
2. La matrice est-elle diagonalisable ? Justifier. Exprimer D , la matrice diagonale associée à A.
3. Déterminer la matrice de passage P et calculer son inverse P^{-1}.
4. Quel est le lien entre les valeurs propres de A et celles de A^n ? Même question pour les vecteurs propres.
5. Exprimer D^n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et donner une relation entre A^n , D^n, P et P^{-1}.
6. En déduire l'expression de A^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.