Faculté
des **sciences économiques** et de **gestion**
Université de Strasbourg

Année universitaire 2021-2022

LICENCE 3ème ANNEE
Licence Economie et gestion
Double Licence Mathématiques – Economie et gestion
Double Licence Langues Etrangères Appliquées – Economie et gestion

Semestre 6 – Session 1 / Contrôle terminal / Mai 2022

Matière : Optimisation **M. / Mme : Umbhauer Gisèle**

Durée : 2h00
Aucun document autorisé
calculatrices de type collège (non graphiques, non programmables) autorisées

REPONDRE EXCLUSIVEMENT SUR LA COPIE D'EXAMEN

Barème approximatif : Exercice 1, 7.5 points, Exercice 2, 12.5 points
Nota bene : tous vos résultats doivent être justifiés

Exercice 1 (7.5 points)

1) Considérez le programme :

$$\max_{x\in\mathbb{R}\, y\in\mathbb{R}} (611-x)x + (611-x-3y)(x+3y) - 120x - 27y$$

a) Montrez que la fonction objectif est strictement concave.
b) Trouvez le maximum global de cette fonction (précisez uniquement les valeurs de x et y à l'optimum, il est inutile de calculer la valeur de la fonction objectif).

2) On suppose maintenant que la fonction objectif représente la situation suivante. Soit une entreprise qui vend sur deux années un bien A, dont le montant produit dépend de son investissement en bien A mais également en bien B, qui permet d'augmenter la production de bien A. Ainsi, si l'entreprise investit dans une quantité x de bien A la première année (au prix de 120 unités monétaires par unité achetée) et dans une quantité y de bien B la première année (au prix de 27 unités monétaires par unité achetée), elle pourra vendre x unités de bien A la première année et x+3y unités de bien A la deuxième année. Le prix de vente par unité de k unités de bien A est 611-k. On suppose aussi que l'entreprise ne peut pas investir dans plus de 199 unités de bien A. Son programme s'écrit donc :

$$\max_{x\in\mathbb{R}\, y\in\mathbb{R}} (611-x)x + (611-x-3y)(x+3y) - 120x - 27y$$

s.c. $199 - x \geq 0$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

a) Précisez pourquoi les fonctions de contraintes sont concaves. La condition de Slater est-elle remplie ? Au vu de la question 1a, que peut-on en déduire au sujet des conditions de Kuhn et Tucker ?

b) On applique la méthode de Kuhn et Tucker. Ecrivez les conditions de Kuhn et Tucker (il est inutile d'écrire les relations d'exclusion et de positivité des multiplicateurs); vous noterez λ, μ_1 et μ_2 les 3 multiplicateurs (dans l'ordre des contraintes).

c) Au vu de votre réponse à la question 1b, quelle sera la contrainte serrée à l'optimum ? Trouvez l'optimum en précisant les valeurs de x, y, λ, μ_1, μ_2 et la valeur de l'objectif à l'optimum.

d) Donnez une valeur approchée de la fonction objectif à l'optimum si l'entreprise peut investir dans 200 unités de bien A.

Exercice 2 (12.5 points)

Une enseignante a décidé de calculer les moyennes autrement. Plutôt que de pratiquer la moyenne arithmétique, elle pratique la moyenne aux puissances 4 (moyenne P4), c'est-à-dire :

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une suite de n notes de 0 à 20. La moyenne P4 est :

$$((x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4)/n\,)^{1/4}$$

Ainsi, si un étudiant a les 3 notes 8, 10 et 11, sa moyenne P4 vaut $[(8^4+10^4+11^4)/3]^{1/4}=9.893$, alors que sa moyenne arithmétique vaut 9.667.

Partie I Benjamin a obtenu 3 fois la note 7, Elise a obtenu les 3 notes 0, 7 et 14, et Marcel a eu les 3 notes 0, 1 et 20. Ils ont donc chacun une moyenne arithmétique de 7 et sont logiquement recalés à l'examen présenté.
Calculez la moyenne P4 des 3 étudiants (les résultats sont un peu surprenants). Que constatez-vous en comparant ces 3 moyennes par rapport à la moyenne arithmétique 7 ? Que constatez-vous en comparant les 3 moyennes P4 entre elles ? Que privilégie une moyenne P4 ?

Partie II Un étudiant est convaincu que la moyenne P4 de 3 nombres positifs ou nuls est toujours supérieure ou égale à leur moyenne arithmétique. L'idée est de montrer qu'il a raison.

On décide donc de résoudre le programme 1:

$$\left.\begin{array}{c} \min\limits_{x_1\geq 0\; x_2\geq 0\; x_3\geq 0} [(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)/3]^{1/4} \\ \text{s.c. } \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = K \end{array}\right\} \text{Programme 1}$$

où K est une constante strictement positive.

1)Justifiez rapidement pourquoi ce programme permet de montrer que la moyenne P4 de 3 nombres positifs ou nuls est supérieure ou égale à leur moyenne arithmétique.

2)Justifiez rapidement pourquoi les solutions du programme 1 sont identiques à celles du programme 2 :

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{x_1\geq 0\; x_2\geq 0\; x_3\geq 0} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \\ \text{s.c. } \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = K \quad \textit{(K est une constante strictement positive)} \end{array}\right\} \text{Programme 2}$$

3) On résout le programme 2.

a) Que permet d'affirmer le théorème de Weierstrass ? Justifiez rapidement.

b) Quel est le problème rencontré en essayant d'appliquer la méthode de Lagrange ?

Partie III On vous demande d'étudier séparément le programme 3 et le programme 4 :

Programme 3

$$\min_{x_1>0\, x_2>0\, x_3>0} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$$

s.c. $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = K$

(K est une constante strictement positive)

Programme 4

$$\min_{x_1\geq 0\, x_2\geq 0\, x_3\geq 0} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$$

s.c. $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = K$ avec au moins un des $x_i = 0$, i de 1 à 3

1) On résout le programme 3. La méthode de Lagrange s'applique -t-elle ? Ecrivez les conditions de Lagrange et trouvez le point candidat. Précisez la valeur de la fonction objectif correspondant à ce point candidat. On vous informe que ce point est un minimum local du programme 3. Commentez en cherchant la valeur objectif correspondante dans le programme 1.

2) On s'intéresse maintenant au programme 4 et on choisit de l'étudier pour $x_1 = 0$, $x_2>0$ et $x_3>0$. Cela revient donc à étudier le programme :

$$\min_{x_2>0\, x_3>0} x_2^4 + x_3^4$$

s.c. $\frac{x_2+x_3}{3} = K$ *(K est une constante strictement positive)*

a) Ecrivez les conditions de Lagrange, trouvez le point candidat et calculez la valeur de la fonction objectif. On vous informe que ce point est un minimum local du programme étudié.

b) Que constatez-vous en comparant les valeurs des fonctions objectif obtenues aux questions 1 et 2a (Partie III)? Pourquoi ce résultat était attendu au vu de la Partie I ?

3) Que se passe-t-il si on étudie le programme 4 avec $x_1=0$ et $x_2=0$? Commentez.

4) En rassemblant les résultats aux questions 1, 2 et 3 (Partie III), précisez le minimum global du programme 2 (et donc du programme 1). Commentez. Pensez-vous que le résultat se généralise à un nombre quelconque de nombres positifs ou nuls ? Si on remplaçait min par max dans le programme 1, quel serait le maximum global de ce problème ? Commentez.

Notes de cours

Thème 1 : Théorème de Weierstrass

Théorème de Weierstrass :

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E étant fermé et borné et f une fonction continue définie sur E. Alors f atteint son maximum global et son minimum global sur E.

Corollaires :

Soit une fonction f continue définie sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifie : $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$
Alors f admet un minimum global.

Soit une fonction f continue définie sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifie : $f(x) \to -\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$
Alors f admet un maximum global.

Thème 2 : Optimisation sans contraintes

> Théorème :
> Soit f une fonction définie sur un ensemble ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$.
> f est C^1 sur E si et seulement si toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues sur E.
> $Df(x)= (f'_{x_1}(x), f'_{x_2}(x), \dots, f'_{x_n}(x))$

Supposons que f soit différentiable sur E et que Df(x) soit elle-même différentiable sur E, c'est-à-dire que pour tout i de 1 à n, la dérivée partielle $f'_i(x)$ est différentiable en x. Alors f est dite 2 fois différentiable, et cette double différentielle est notée $D^2f(x)$.

$$D^2f(x) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(x) & \cdots & f''_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(x) & \cdots & f''_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}$$

$D^2f(x)$ est appelé le hessien (ou la matrice hessienne) de f en x.
Si toutes les dérivées partielles secondes $f''_{x_ix_j}(x)$ sont des fonctions continues sur E, alors f est dite 2 fois continûment différentiable, ou encore C^2.

On appelle mineur principal d'ordre k, la matrice A_k issue de A définie par : $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \cdot & a_{kk} \end{pmatrix}$
où a_{ij} est l'élément qui se situe à la ième ligne et à la jème colonne de la matrice A.
Soit A une matrice symétrique de taille n x n.
A est définie négative si et seulement si : $\forall$k de 1 à n, $(-1)^k \det A_k > 0$
A est définie positive si et seulement si : $\forall$k de 1 à n, $\det A_k > 0$
A est semi-définie négative si et seulement si : $\forall$ la permutation des indices π, $\forall$k de 1 à n,
$(-1)^k \det A^{\pi}_k \geq 0$, où A^{π} est la matrice obtenue à partir de A suite à la permutation π des indices des variables.
A est semi-définie positive si et seulement si : $\forall$ la permutation des indices π, $\forall$k de 1 à n,
$\det A^{\pi}_k \geq 0$, où A^{π} est la matrice obtenue à partir de A suite à la permutation π des indices des variables.

Théorèmes de conditions nécessaires :

> Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que x*, un point intérieur de E, est un maximum local ou un minimum local de f sur E. Supposons aussi que f est différentiable en x*. Alors $Df(x^*) = 0$

> Soit f une fonction C^2 définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que x*, un point intérieur de E, est un maximum local de f sur E. Alors $D^2f(x^*)$ est semi définie négative.
> Soit f une fonction C^2 définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que x*, un point intérieur de E, est un minimum local de f sur E. Alors $D^2f(x^*)$ est semi définie positive.

> **Théorème de conditions suffisantes :**
> Soit f une fonction C^2 définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ et x* un point intérieur de E. Si $Df(x^*) = 0$ et $D^2f(x^*)$ est définie négative, alors x* est un maximum local strict de f sur E.
> Soit f une fonction C^2 définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ et x* un point intérieur de E. Si $Df(x^*) = 0$ et $D^2f(x^*)$ est définie positive, alors x* est un minimum local strict de f sur E.

Thème 3 : Optimisation sous contraintes égalités

Soit $U= E \cap \{x \in \mathbb{R}^n / g_j(x)= 0, j \text{ de } 1 \text{ à } k\}$
où E est un ensemble ouvert inclus dans $\mathbb{R}^n$ et $g_j(x)$, j de 1 à k, des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.

Conditions nécessaires :

<u>Théorème de Lagrange</u>

Soient f et g_j, j de 1 à k, des fonctions C^1 définies sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que x* soit un max local ou un minimum local de f sur l'ensemble U défini comme ci-dessus. Supposons aussi que rang Dg(x*)= k.

Alors il existe un vecteur $\lambda^* \in \mathbb{R}^k$ / :

$Df(x^*)+\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* Dg_j(x^*) = 0$

Dg(x*) est la matrice jacobienne des contraintes évaluée en x*, c'est-à-dire :

$$Dg(x^*) = \begin{pmatrix} g_1{}'_{x_1}(x^*) & . & . & g_1{}'_{x_n}(x^*) \\ . & & . & . \\ g_k{}'_{x_1}(x^*) & . & . & g_k{}'_{x_n}(x^*) \end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice est le nombre de colonnes linéairement indépendantes.

(Exiger que le rang Dg(x*)=k revient à exiger qu'il y ait k colonnes qui, mises ensemble, forment une matrice dont le déterminant est non nul). Rang Dg(x*) = k est la condition de qualification des contraintes. Si elle n'est pas remplie, le théorème de Lagrange ne s'applique pas.

Les λ_j^*, j de 1 à k, sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

Soit C un ensemble ouvert $\subset \mathbb{R}^k$ et c= $(c_1,\dots,c_k)$ un élément de c.

Soit U(C) = E $\cap \{x \in \mathbb{R}^n / g_j(x,c_j)= g_j(x)+c_j= 0$, j de 1 à k$\}$

Supposons qu'il existe un maximum global x*(c) pour chaque c de C et que la condition de qualification soit remplie en x*(c), de sorte qu'il existe $\lambda^*(c) \in \mathbb{R}^k$ / : $Df(x^*(c))+\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^*(c) Dg_j(x^*(c),c) = 0$

Notons F(c) la valeur de la fonction objectif à l'optimum obtenue pour c, i.e. F(c) = f(x*(c)). Alors $\lambda_j^*(c)= F'_{c_j}(c)$

Aussi chaque multiplicateur mesure la variation de l'objectif suite à un petit desserrement de la contrainte associée. Plus précisément, quand les quantités dc_j, j de 1 à k, sont petites ($\to 0$), on a :

$$F(c+dc) \approx F(c) + \sum_{j=1}^{k} dc_j \lambda_j^*(c)$$

Conditions suffisantes

Soit, pour i de k+1 à n, $M_i(x^*) = \begin{pmatrix} L''_{x_1x_1}(x^*) & . & L''_{x_1x_i}(x^*) & g_1{}'_{x_1}(x^*) & . & g_k{}'_{x_1}(x^*) \\ . & . & . & . & . & . \\ L''_{x_ix_1}(x^*) & . & L''_{x_ix_i}(x^*) & g_1{}'_{x_i}(x^*) & . & g_k{}'_{x_i}(x^*) \\ g_1{}'_{x_1}(x^*) & . & g_1{}'_{x_i}(x^*) & 0 & . & 0 \\ . & . & . & 0 & . & 0 \\ g_k{}'_{x_1}(x^*) & . & g_k{}'_{x_i}(x^*) & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$

Nota Bene : dans $M_i(x^*)$ les variables x_i sont réindicées de sorte que les k premières colonnes de la matrice jacobienne des contraintes en x* soient linéairement indépendantes.

On suppose que les fonctions f et g_j, j de 1 à k, sont des fonctions définies sur E $\subset \mathbb{R}^n$ et qu'elles sont C^2 au voisinage d'un point x* de E tel que $g_j(x^*) = 0$, rang Dg(x*) =k et il existe un vecteur $\lambda^* \in \mathbb{R}^k$ tel que $Df(x^*)+\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* Dg_j(x^*) = 0$

- Si $\forall$i de k+1 à n, $(-1)^k$ dét $M_i(x^*) > 0$, alors f a un minimum local strict en x* sous les contraintes $g_j(x) =0$, j de 1à k.
- Si $\forall$i de k+1 à n, $(-1)^i$ dét $M_i(x^*) > 0$, alors f a un maximum local strict en x* sous les contraintes $g_j(x) =0$, j de 1 à k.

CN : Si f a un minimum local en x* sous les contraintes $g_j(x) =0$, j de 1 à k, alors, $\forall$i de k+1 à n, $(-1)^k$dét $M_i(x^*) \geq 0$.

CN : Si f a un maximum local en x* sous les contraintes $g_j(x) =0$, j de 1 à k, alors, $\forall$i de k+1 à n, $(-1)^i$ dét $M_i(x^*) \geq 0$.

Théorèmes enveloppe

<u>Théorème</u> : Soit f(x,a) une fonction C^1 de $x \in R^n$ et d'un paramètre a de $\mathbb{R}$. Soit le programme de maximisation libre : $\max_x f(x,a)$

Pour une valeur de a fixée, soit x*(a) une solution de ce problème. Supposons que x*(a) soit une fonction C^1 de a. Alors : $\frac{d}{da} f(x^*(a), a) = \frac{\partial}{\partial a} f(x^*(a), a)$

<u>Théorème :</u> Soit f, $g_1, \dots, g_k$ des fonctions C^1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $x \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$.
Pour une valeur de a fixée, soit x*(a) la solution du programme de maximisation contrainte :

$\max_x f(x,a)$

s.c. : $g_1(x,a)=0, \dots, g_k(x,a) = 0$

Supposons que x*(a) et les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_j^*(a)$, j de 1 à k, soient des fonctions C^1 de a et que la contrainte de qualification des contraintes soit remplie. Alors

$$\frac{d}{da} f(x^*(a), a) = \frac{\partial}{\partial a} L(x^*(a), \lambda^*(a), a)$$

Thème 4 : Optimisation avec contraintes inégalités

Soit $U = E \cap \{x \in \mathbb{R}^n / h_j(x) \geq 0, j \text{ de } 1 \text{ à } p\}$

où E est un ensemble ouvert inclus dans $\mathbb{R}^n$ et $h_j(x)$, j de 1 à p, des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.

Conditions nécessaires

<u>Théorème de Kuhn et Tucker : maximum local</u>

Soient f et h_j, j de 1 à p, des fonctions C^1 définies sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que x* soit un maximum local de f sur l'ensemble U défini comme ci-dessus. Soit T l'ensemble des indices des contraintes serrées et supposons que le rang de la matrice jacobienne des contraintes serrées, rang $Dg_T(x^*)$, soit égal à card(T).
Alors il existe un vecteur $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ / :

1) $\lambda_j^* \geq 0$ et $\lambda_j^* h_j(x^*) = 0$ pour j de 1 à p

2) $Df(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* Dh_j(x^*) = 0$

<u>Théorème de Kuhn et Tucker : minimum local</u>

Soient f et h_j, j de 1 à p, des fonctions C^1 définies sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que x* soit un minimum local de f sur l'ensemble U défini comme ci-dessus. Soit T l'ensemble des indices des contraintes serrées et supposons que le rang de la matrice jacobienne des contraintes serrées, rang $Dg_T(x^*)$, soit égal à card(T).
Alors il existe un vecteur $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ / :

1) $\lambda_j^* \geq 0$ et $\lambda_j^* h_j(x^*) = 0$ pour j de 1 à p

2) $Df(x^*) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* Dh_j(x^*) = 0$

Les λ_j^*, j de 1 à p, sont appelés les <u>multiplicateurs de Kuhn et Tucker</u> et ont la même signification que les multiplicateurs de Lagrange. En particulier, quand une contrainte n'est pas serrée, le multiplicateur associé est (logiquement) nul.

Extension au cas mixte :

Soit $U = E \cap \{x \in \mathbb{R}^n / g_j(x)=0, j \text{ de } 1 \text{ à } k \text{ et } h_j(x) \geq 0, j \text{ de } 1 \text{ à } p\}$,
où E est un ensemble ouvert inclus dans $\mathbb{R}^n$, $g_j(x)$, j de 1 à k, et $h_j(x)$, j de 1 à p, des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Théorème de Kuhn et Tucker, maximum local, cas mixte</u>

Soient f, $g_j(x)$, j de 1 à k, et h_j, j de 1 à p, des fonctions C^1 définies sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que x* soit un maximum local de f sur l'ensemble U défini comme ci-dessus. Soit V l'ensemble des indices de toutes les contraintes serrées (i.e. les contraintes égalités + les contraintes inégalités serrées) et supposons que le rang de la matrice jacobienne de ces contraintes serrées soit égal à card(V). Alors il existe un vecteur $\lambda_e^* \in R^k$ et un vecteur $\lambda_i^* \in R^p$ / :

1) $\lambda_{ij}^* \geq 0$ et $\lambda_{ij}^* h_j(x^*) = 0$ pour j de 1 à p

2) $Df(x^*) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ej}^* Dg_j(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij}^* Dh_j(x^*) = 0$

Théorème de Kuhn et Tucker, minimum local, cas mixte

Soient f, $g_j(x)$, j de 1 à k, et h_j, j de 1 à p, des fonctions C^1 définies sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que x* soit un minimum local de f sur l'ensemble U défini comme ci-dessus. Soit V l'ensemble des indices de toutes les contraintes serrées (i.e. les contraintes égalités + les contraintes inégalités serrées) et supposons que le rang de la matrice jacobienne de ces contraintes serrées soit égal à card(V). Alors il existe un vecteur $\lambda_e^* \in \mathbb{R}^k$ et un vecteur $\lambda_i^* \in \mathbb{R}^p$ / :

1) $\lambda_{ij}^* \geq 0$ et $\lambda_{ij}^* h_j(x^*) = 0$ pour j de 1 à p

2) $Df(x^*) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ej}^* Dg_j(x^*) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij}^* Dh_j(x^*) = 0$

Conditions suffisantes, cas mixte

Soit $U = E \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \ g_j(x)=0, j \text{ de } 1 \text{ à } k \text{ et } h_j(x) \geq 0, j \text{ de } 1 \text{ à } p\}$

$M_i(x^*)=$

$$\begin{pmatrix} L''_{x_1x_1}(x^*) & . & L''_{x_1x_i}(x^*) & g_1'{}_{x_1}(x^*) & . & g_k'{}_{x_1}(x^*) & h_1'{}_{x_1}(x^*) & . & h_t'{}_{x_1}(x^*) \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ L''_{x_ix_1}(x^*) & . & L''_{x_ix_i}(x^*) & g_1'{}_{x_i}(x^*) & . & g_k'{}_{x_i}(x^*) & h_1'{}_{x_i}(x^*) & . & h_t'{}_{x_i}(x^*) \\ g_1'{}_{x_1}(x^*) & . & g_1'{}_{x_i}(x^*) & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ g_k'{}_{x_1}(x^*) & . & g_k'{}_{x_i}(x^*) & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ h_1'{}_{x_1}(x^*) & . & h_1'{}_{x_i}(x^*) & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ h_t'{}_{x_1}(x^*) & . & h_t'{}_{x_i}(x^*) & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

pour i de k + t +1 à n, où t est le nombre de contraintes inégalités serrées ($t \leq p$).

Nota Bene : dans $M_i(x^*)$ les variables x_i sont réindicées de sorte que les k+t premières colonnes de la matrice jacobienne des contraintes serrées en x* soient linéairement indépendantes.

Soient f, $g_j(x)$, j de 1 à k, et h_j, j de 1 à p, des fonctions C^2 (au moins au voisinage de x*) définies sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que pour x* de U, le rang de la matrice jacobienne des contraintes serrées soit égal au nombre de contraintes serrées, qu'il existe un vecteur $\lambda_e^* \in \mathbb{R}^k$ et un vecteur $\lambda_i^* \in \mathbb{R}^p$ /

$\lambda_{ij}^* \geq 0$, $\lambda_{ij}^* h_j(x^*) = 0$ pour j de 1 à p et

$Df(x^*) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ej}^* Dg_j(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij}^* Dh_j(x^*) = 0$.

On note t le nombre de contraintes inégalités serrées.

Si $\forall$i de k + t + 1 à n, $(-1)^i$ dét $M_i(x^*) > 0$, alors f a un maximum local en x* sous les contraintes $g_j(x) = 0$, j de 1 à k, et les contraintes $h_j(x) \geq 0$, j de 1 à p.

Soient f, $g_j(x)$, j de 1 à k, et h_j, j de 1 à p, des fonctions C^2 (au moins au voisinage de x*) définies sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que pour x* de U, le rang de la matrice jacobienne des contraintes serrées soit égal au nombre de contraintes serrées, qu'il existe un vecteur $\lambda_e^* \in \mathbb{R}^k$ et un vecteur $\lambda_i^* \in \mathbb{R}^p$ /

$\lambda_{ij}^* \geq 0$, $\lambda_{ij}^* h_j(x^*) = 0$ pour j de 1 à p et

$Df(x^*) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ej}^* Dg_j(x^*) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij}^* Dh_j(x^*) = 0$.

On note t le nombre de contraintes inégalités serrées.

Si $\forall$i de k + t + 1 à n, $(-1)^{k+t}$ dét $M_i(x^*) > 0$, alors f a un minimum local en x* sous les contraintes $g_j(x) = 0$, j de 1 à k et les contraintes $h_j(x) \geq 0$, j de 1à p.

Thème 5 : Convexité

Définitions et théorèmes

Un ensemble $E \subset R^n$ est convexe si :

$\forall x \in E, \forall y \in E \ \forall t \in [0, 1], \quad tx+(1-t)y \in E$.

Soit f une fonction C^2 définie sur un ensemble E ouvert inclus dans R^n.
f est concave sur E si et seulement si $D^2f(x)$ est semi définie négative pour tout x de E
f est convexe sur E si et seulement si $D^2f(x)$ est semi définie positive pour tout x de E
Si $D^2f(x)$ est définie négative sur E, alors f est strictement concave.
Si $D^2f(x)$ est définie positive sur E, alors f est strictement convexe.

Convexité et optimisation

Soit f une fonction concave définie sur un ensemble convexe $E \subset R^n$. Alors tout maximum local de f sur E est un maximum global de f sur E.
De plus: $\arg\max\{f(x)/ x \in E\} = \varnothing$ ou un ensemble convexe.
Soit f une fonction convexe définie sur un ensemble convexe $E \subset R^n$. Alors tout minimum local de f sur E est un minimum global de f sur E. De plus: $\arg\min\{f(x)/ x \in E\} = \varnothing$ ou un ensemble convexe.
Soit f une fonction strictement concave définie sur un ensemble convexe $E \subset R^n$.
Alors $\arg\max\{f(x)/ x \in E\}$ est soit l'ensemble vide, soit un singleton.
Soit f une fonction strictement convexe définie sur un ensemble convexe $E \subset R^n$.
Alors $\arg\min\{f(x)/ x \in E\}$ est soit l'ensemble vide, soit un singleton.

<u>Optimisation sans contraintes</u> Soit f une fonction concave, définie et différentiable sur un ensemble convexe $E \subset R^n$. Alors x* est un maximum global non contraint de f sur E si et seulement si $Df(x^*) = 0$
Soit f une fonction convexe, définie et différentiable sur un ensemble convexe $E \subset R^n$. Alors x* est un minimum global non contraint de f sur E si et seulement si $Df(x^*) = 0$

<u>Maximisation avec contraintes inégalités</u> Soit f une fonction concave C^1, définie sur un ensemble convexe ouvert $E \subset R^n$. Soient h_j des fonctions définies sur R^n, C^1 et concaves, j de 1 à p.
Supposons qu'il existe $\underline{x} \in E$/ : $\forall$ j de 1 à p, $h_j(\underline{x}) > 0$ (<u>condition de Slater</u>)
Alors x* est un maximum global de f sur $U = \{x \in E/ h_j(x) \geq 0,\ j \text{ de } 1 \text{ à } p\}$ si et seulement si $\exists \lambda^* \in R^p$ tel que :
1) $Df(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* Dh_j(x^*) = 0$
2) $\lambda_j^* \geq 0$, $\lambda_j^* h_j(x^*) = 0$ pour j de 1 à p.
Si la condition de Slater n'est pas remplie les conditions de KT (1) et (2) restent suffisantes, mais il peut exister un maximum global qui ne vérifie pas les conditions de KT.

<u>Minimisation avec contraintes inégalités</u> Soit f une fonction convexe C^1, définie sur un ensemble convexe ouvert $E \subset R^n$. Soient h_j des fonctions définies sur R^n, C^1 et concaves, j de 1 à p.
Supposons qu'il existe $\underline{x} \in E$/ : $\forall$ j de 1 à p, $h_j(\underline{x}) > 0$ (condition de Slater)
Alors x* est un minimum global de f sur $U = \{x \in E/ h_j(x) \geq 0,\ j \text{ de } 1 \text{ à } p\}$ si et seulement si $\exists \lambda^* \in R^p$ tel que :
1) $Df(x^*) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* Dh_j(x^*) = 0$
2) $\lambda^* \geq 0$, $\lambda_j^* h_j(x^*) = 0$ pour j de 1 à p.
Si la condition de Slater n'est pas remplie les conditions de KT (1) et (2) restent suffisantes, mais il peut exister un minimum global qui ne vérifie pas les conditions de KT.