Faculté
des **sciences économiques** et de **gestion**
Université de Strasbourg

LICENCE 3ème ANNEE
Licence Economie et gestion
Parcours Economie Quantitative
Semestre 6 – Session 1 / Contrôle continu (CC) - Mars 2022

Matière : Optimisation
Enseignante : Mme Umbhauer
Durée : 1h30
Aucun document autorisé
Calculatrices de type collège (non graphiques, non programmables) autorisées

---

Barème : exercice 10 points, exercice 2, 3 points, exercice 3, 7 points.
Le barème est donné à titre indicatif (il est susceptible d'être modifié). **Tous vos résultats doivent être justifiés.**
Des notes de cours sont données à la fin du sujet.

Exercice 1 (10 points)

On considère la fonction $f(x_1, x_2)$ sur $\mathbb{R}^2$, définie par :
$f(x_1, x_2) = 3x_1^4 + 8x_1^3 - 12x_1^2x_2^2 + 6x_2^4$
1) Vers quoi tend $f(x_1, x_2)$ quand seul $x_1 \to +/-\infty$?
Vers quoi tend $f(x_1, x_2)$ quand x_1 et $x_2 \to +/-\infty$ et que $x_1=x_2$? Pourquoi pouvez-vous en déduire qu'il n'y aura ni maximum global ni minimum global ? Justifiez.
2) On cherche les optima. Peut-on appliquer les conditions nécessaires ? Justifiez. Trouvez tous les points candidats.
3) Etudiez la nature des points candidats.

Exercice 2 (3 points)

On considère une fonction f réelle, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) On vous informe que f est continue, que $f(x) \to -3$ quand $x \to -\infty$ et que $f(x) \to 2$ quand $x \to +\infty$. On vous informe également que $f(4)= 4$.

Vous est-il possible de déduire que f admet un optimum global, et si oui, un maximum global ou un minimum global, voire les deux ? Justifiez. Un raisonnement littéraire suffit.
Conseil : aidez-vous d'un graphique.

2) Si f n'est pas continue, est-ce que votre réponse à la question 1 est toujours exacte ? Justifiez en illustrant vos commentaires par un graphique.

Exercice 3 (7 points)

La campagne présidentielle bat son plein et les candidats sont obligés de visiter les grandes villes de France pour y tenir des meetings. Considérez le candidat A qui se trouve confronté au problème suivant : il y a 50 villes dans lesquelles A peut tenir un meeting, mais il ne dispose que de 20 jours. Soit x_{ij} la variable qui exprime que A tient un meeting dans la ville i le jour j (on a alors $x_{ij}=1$), ou qu'il ne tient pas un meeting dans la ville i le jour j (auquel cas $x_{ij}=0$).

1) Comment exprimer que x_{ij} ne peut valoir que 0 ou 1 ?
2) Sur les 20 jours, A va dans la ville 5 au plus une fois. Comment exprimer cette contrainte ? On suppose par la suite que cette contrainte vaut pour chaque ville i. Ecrivez la contrainte.
3) A ne peut pas tenir plus de 2 meetings le jour 12. Comment exprimer cette contrainte ? On suppose par la suite que cette contrainte vaut pour chaque jour j. Ecrivez la contrainte.
4) Le candidat A est en conflit avec le candidat B qui est susceptible de tenir des meetings dans les mêmes villes les mêmes jours. Soit y_{ij} la variable qui exprime que B tient un meeting dans la ville i le jour j (on a alors $y_{ij} =1$), ou qu'il ne tient pas un meeting dans la ville i le jour j (auquel cas $y_{ij}=0$). Pour éviter des affrontements entre groupes de sympathisants, il ne faut pas que les candidats A et B tiennent un meeting dans la même ville le même jour. Comment exprimer cette condition ?
5) Pour que A ne se fatigue pas trop, son équipe décide que si un jour il tient 2 meetings, alors il tient au plus 1 meeting le jour suivant. Comment exprimer cette contrainte ?
6) Les villes 15 et 16 sont très proches l'une de l'autre. Aussi on demande au candidat A, pour économiser des frais de transport et d'organisation, de tenir un meeting dans chacune des 2 villes le même jour ou de ne tenir de meeting dans aucune des deux villes. Comment pouvez-vous exprimer cette contrainte ?

Notes de cours
Thème 1 : Théorème de Weierstrass

Théorème de Weierstrass :

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E étant fermé et borné et f une fonction continue définie sur E. Alors f atteint son maximum global et son minimum global sur E.

Corollaires :
Soit une fonction f continue définie sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifie :
$f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$
Alors f admet un minimum global.
Soit une fonction f continue définie sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifie :
$f(x) \to -\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$
Alors f admet un maximum global.

Thème 2 : Optimisation sans contraintes

Théorème :
Soit f une fonction définie sur un ensemble ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$.
f est C^1 sur E si et seulement si toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues sur E.
$Df(x) = (f'_{x_1}(x), f'_{x_2}(x), \dots, f'_{x_n}(x))$

Supposons que f soit différentiable sur E et que Df(x) soit elle-même différentiable sur E, c'est-à-dire que pour tout i de 1 à n, la dérivée partielle $f'_i(x)$ est différentiable en x. Alors f est dite 2 fois différentiable, et cette double différentielle est notée $D^2f(x)$.

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(x) & \cdots & f''_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(x) & \cdots & f''_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}$$

$D^2f(x)$ est appelé le hessien (ou la matrice hessienne) de f en x.
Si toutes les dérivées partielles secondes $f''_{x_ix_j}(x)$ sont des fonctions continues sur E, alors f est dite 2 fois continûment différentiable, ou encore C^2.
On appelle mineur principal d'ordre k, la matrice A_k issue de A définie par :

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & . & a_{1k} \\ . & . & . \\ a_{k1} & . & a_{kk} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} est l'élément qui se situe à la ième ligne et à la jème colonne de la matrice A.

Soit A une matrice symétrique de taille n x n.
A est définie négative si et seulement si : $\forall$k de 1 à n, $(-1)^k \det A_k > 0$
A est définie positive si et seulement si : $\forall$k de 1 à n, $\det A_k > 0$
A est semi-définie négative si et seulement si : $\forall$ la permutation des indices π, $\forall$k de 1 à n, $(-1)^k \det A^\pi_k \geq 0$, où A^π est la matrice obtenue à partir de A suite à la permutation π des indices des variables.
A est semi-définie positive si et seulement si : $\forall$ la permutation des indices π, $\forall$k de 1 à n, $\det A^\pi_k \geq 0$, où A^π est la matrice obtenue à partir de A suite à la permutation π des indices des variables.

Théorèmes de conditions nécessaires :

Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que x*, un point intérieur de E, est un maximum local ou un minimum local de f sur E. Supposons aussi que f est différentiable en x*. Alors $Df(x^*) = 0$

Soit f une fonction C^2 définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que x*, un point intérieur de E, est un maximum local de f sur E. Alors $D^2f(x^*)$ est semi définie négative.
Soit f une fonction C^2 définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$. Supposons que x*, un point intérieur de E, est un minimum local de f sur E. Alors $D^2f(x^*)$ est semi définie positive.

Théorème de conditions suffisantes :

Soit f une fonction C^2 définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ et x* un point intérieur de E. Si $Df(x^*) = 0$ et $D^2f(x^*)$ est définie négative, alors x* est un maximum local strict de f sur E.
Soit f une fonction C^2 définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ et x* un point intérieur de E. Si $Df(x^*) = 0$ et $D^2f(x^*)$ est définie positive, alors x* est un minimum local strict de f sur E.