Faculté
des **sciences économiques** et de **gestion**
Université de Strasbourg

Année universitaire 2021/2022 – LICENCES 2ème année
Licence Economie et Gestion

Semestre 4 – Session 1 / Contrôle continu (CC) - Mars 2022

Matière : Probabilités et statistique IV - (COURS : M. J. EL OUARDIGHI ; TD : MM. F. DESTANDAU; A-L. MAHIEU; H.A. NAFI AMIR ; J. RASTOUIL ; Mme. M. SOURY)

Durée : 1h30

Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques.
Les calculatrices type collège, non programmables et non graphiques, sont *autorisées.*
Barème indicatif : **I. 14 points** (1+1+1+4+2+2+2+1). **II. 6 points** (3+3).

Sujet

I. Un groupe immobilier qui détient plusieurs bâtiments hésite à faire remplacer les chaudières de son parc immobilier. Les chaudières sont affichées au prix de 10 milliers d'euros chacune et, selon le vendeur, chaque chaudière permet d'économiser 11 milliers d'euros de chauffage (sur l'ensemble de sa durée d'utilisation) avec une probabilité de 0,80. Dans les autres cas, ces chaudières n'apportent pas d'économies particulières.

Avant de se décider à changer l'ensemble des chaudières de son parc immobilier, le groupe immobilier décide de remplacer 6 chaudières ; on note par X_i le montant des économies réalisées dans chaque bâtiment, avec $1 \leq i \leq 6$. Nous aurons $X_i \rightarrow N(11;3)$ si le changement de chaudière est efficace et $X_i \rightarrow N(0;3)$ s'il ne l'est pas.

I.1. Dans la cadre de l'approche de Bayes, reporter sur votre copie et compléter le tableau suivant des coûts associés à chaque décision en fonction de l'état de la nature.

	Réalité (état de la nature)	
	$H_0\!: \mu = 11$ chaudière efficace	$H_1\!: \mu = 0$ chaudière inefficace
Accepter $H_0 = DH_0$ changement de chaudière		
Accepter $H_1 = DH_1$ pas de changement de chaudière		
Probabilité a priori	$p_0 =$	$p_1 =$

I.2. Rappeler, en une phrase, la règle de décision de Bayes.

I.3. Donner les expressions des espérances des coûts selon les décisions envisageables, accepter ou rejeter H_0, en faisant apparaitre les probabilités a posteriori, que nous notons π_0 et π_1.

I.4. Soient $L_0 = L(x_1, \dots, x_n; \mu_0)$ et $L_1 = L(x_1, \dots, x_n; \mu_1)$ les fonctions de vraisemblance respectivement sous les hypothèses H_0 et H_1 .

a) Donner, sans les calculer, les expressions théoriques des probabilités a posteriori π_0 et π_1 en fonction de L_0 et L_1 et des probabilités a priori p_0 et p_1.

b) En remplaçant π_0 et π_1 par leurs expressions obtenues en **a)** et en tenant compte des valeurs des probabilités a priori, réécrire les expressions des espérances des coûts en fonction des vraisemblances L_0 et L_1.

c) Discuter la décision à retenir en explicitant la relation entre les deux vraisemblances de type $\frac{L_0}{L_1} < c$ où c est une constante à déterminer.

I.5. Donner les expressions des fonctions de vraisemblances L_0 et L_1. Calculer le rapport des deux vraisemblances $\frac{L_0}{L_1}$ et déduire ensuite le logarithme de ce rapport, i.e. $\ln(\frac{L_0}{L_1})$.

I.6. En tenant compte de vos résultats en **I.4.** et **I.5.**, préciser quelle devrait être la somme des économies réalisées, i.e. $\sum_{i=1}^{n} x_i$, pour que le groupe opte pour un renouvellement de l'ensemble des chaudières.

I.7. A la fin de l'expérience, le groupe immobilier constate une économie moyenne de l'ordre de 9.68, i.e. $\bar{x} = 9.68$, réalisée avec les six chaudières. Quelle est la décision du groupe immobilier ?

I.8. Pour un écart-type connu $\sigma = 3$, donner un intervalle de confiance de 90% pour la moyenne des économies des dépenses de chauffage.

II. Chez un individu adulte, le logarithme du dosage est une variable aléatoire, que nous notons X, qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ. Cette variable aléatoire X est un indicateur de risque cardio-vasculaire chez les adultes. Nous considérons que, chez les individus sains, $\mu = -1$, alors que chez les individus à risque $\mu = 0$. Dans les deux cas la valeur de l'écart type est la même à savoir $\sigma = 1$.

Une autorité locale souhaite savoir si sa population est plutôt saine ou plutôt à risque. Dans le second cas, une campagne de sensibilisation sera lancée pour prévenir des risques cardio-vasculaires.

Pour pouvoir prendre cette décision, le logarithme de dosage est mesuré sur 10 individus choisis de façon représentative. La moyenne empirique $\bar{x} = -0.5$.

II.1. Dans un premier temps, nous supposons que l'autorité locale ne souhaite pas alarmer inutilement sa population, et craint que la campagne de sensibilisation ne soit trop coûteuse.

a) Quelles hypothèses H_0 et H_1 choisira-t-elle de tester ?

b) Donner la règle de décision pour ce test au seuil de $\alpha = 5\%$. Quelle sera votre conclusion ?

c) Calculer le risque de deuxième espèce et la puissance du test.

II.2. Dans un second temps, nous supposons que l'autorité locale préfère alarmer à tort sa population plutôt que de ne pas l'avertir d'un risque réel.

a) Quelles hypothèses H_0' et H_1' choisira-t-elle de tester?

b) Calculer la probabilité critique. Conclure au seuil α =10%.