Faculté
des **sciences économiques** et de **gestion**
Université de Strasbourg

Année universitaire 2022-2023
Licences 2ème année – Semestre 4 – Session 1

Licence Économie et Gestion
Double Licence Langues Étrangères Appliquées & Économie et Gestion

Contrôle terminal (CT) - Mai 2023

Matière : Mathématiques IV

Enseignant : M. BRECKLE

Durée : 2h00

Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Les calculatrices scientifiques non graphiques et non programmables de type collège sont autorisées.

Tout autre matériel est interdit.

Il est fortement conseillé d'apporter le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la rigueur mathématique et à la présentation : celles-ci sont prises en compte dans la notation et leur absence ou leur insuffisance pourront être sanctionnées.

RÉPONDRE EXCLUSIVEMENT SUR LA COPIE ANONYMÉE D'EXAMEN

NUMEROTER TOUTES LES PAGES (exemple : 1/5)

PARTIE 1 : Systèmes linéaires (5 points)

1) Système à 3 équations et 4 inconnues

On considère le système : $\begin{cases} -x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 17x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 20x_4 = -1 \end{cases}$

Résoudre ce système par la méthode de votre choix et expliciter l'ensemble des solutions.

2) Résolution de problème

Quatre amis vont ensemble s'acheter des vêtements dans le même magasin. On considère que dans ce magasin, tous les pulls sont au même prix, que toutes les chemises sont au même prix et que toutes les vestes sont au même prix.
Le premier débourse 334 € pour l'achat de 2 pulls, 3 chemises et 4 vestes.
Le deuxième débourse 388 € pour l'achat de 3 pulls, 5 chemises et 2 vestes.
Le troisième déboursé 302 € pour l'achat de 4 pulls, 2 chemises et 3 vestes.
Combien paiera le quatrième s'il décide d'acheter 5 pulls, 4 chemises et 5 vestes ?
Présenter le problème sous forme matricielle puis le résoudre.

PARTIE 2 : Puissances de matrices (5 points)

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On se propose de calculer A^{2024}.

1. Exprimer la matrice B telle que $A = B + I_3$.
2. Expliciter B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, expliciter A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$
4. En déduire A^{2024}.

PARTIE 3 : Espaces vectoriels (5 points)

On considère les vecteurs : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) a) La famille $\{u, v, w\}$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier.
   b) La famille $\{u, v\}$ est-elle libre ? Justifier.
2) Soit $F = Vect(u, v, w)$. Donner une base de F ainsi que sa dimension.
3) Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0 \right\}$
   a) Justifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer une base de G.
   c) A-t-on $F = G$?
4) Soit $H = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. A-t-on $G \oplus H = \mathbb{R}^3$? Justifier.

PARTIE 4 : Matrice diagonalisable ? (5 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et l'exprimer sous forme factorisée.
2. En déduire les valeurs propres de A. Préciser leurs multiplicités.
3. Déterminer les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre. En donner une base de vecteurs propres.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier. Si oui, donner la matrice diagonale associée à A. Si non, expliquer pourquoi A n'est pas diagonalisable.